МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

Финансовая математика

Методические указания к практическим занятиям для слушателей ФПК и ПК по специальности переподготовки 1-26 02 82 «Финансовый менеджмент

Витебск
2018

УДК 51:330.4

Составители:

Ю. А. Завацкий, В. С. Денисов, А. П. Дмитриев, А. В. Коваленко

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ», протокол № 5 от 28.05.2018.

Финансовая математика: методические указания к практическим занятиям / сост. Ю. А. Завацкий [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2018. – 46 с.

Издание содержит методические указания к практическим занятиям по курсу «Финансовая математика» и соответствует учебной программе данного курса. Каждая тема указаний содержит краткие теоретические сведения, задания для решения на практических занятиях и задачи для самостоятельного решения. Методические указания предназначены для эффективной подготовки слушателей к практическим занятиям, к промежуточному контролю знаний, зачетам или экзаменам.

УДК 51:330.4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении нескольких лет преподавания дисциплины «Финансовая математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведѐнный материал проверен на нескольких поколениях слушателей и содержит необходимые сведения для будущих экономистов.

Данные учебно-методические материалы предназначены для слушателей ФПК И ПК специальности «Финансовый менеджмент». Приведены теоретические вопросы для сдачи зачѐта по данной дисциплине, содержание и тематика практических занятий по указанному курсу. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Финансовая математика» для слушателей ФПК И ПК специальности «Финансовый менеджмент».

В методических указаниях рассмотрены следующие темы указанного курса: «Процентные деньги и простой процент»; «Сложные проценты»; «Уравнение эквивалентности»; «Простые аннуитеты (ренты)»; «Общие аннуитеты»; «Амортизация и погасительные фонды»; «Вечная рента»; «Облигации; обесценивание»; «Акции». Каждое практическое занятие представляет собой методический материал для его проведения. В начале каждого практического занятия приведѐн краткий теоретический материал (определения, теоремы, формулы, методы и т. п.), который необходимо знать слушателю при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме, однако этих сведений недостаточно для сдачи экзамена или зачѐта по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнения домашнего задания, слушателю необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование занятий, а также их структура построены в соответствии с базовой и учебной программами дисциплины «Финансовая математика» для слушателей ФПК И ПК специальности «Финансовый менеджмент», а также могут применяться на усмотрение преподавателя на практических занятиях студентами других специальностей различных форм обучения. Студенты заочной формы обучения могут применять изложенный в методических указаниях теоретический и практический материал для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

Предложенные методические указания также помогут слушателям подготовиться к прохождению теста по отдельным темам и разделам курса, так как проведение зачѐта или экзамена может подразумевать электронный контроль знаний. Методические указания являются дополнением к электронному курсу «Финансовая математика», разработанного и внедренного в учебный процесс в системе СДО Moodle (www.sdo.vstu.by).

Данное издание может быть использовано студентами других специальностей, изучающих данную дисциплину на дневном и заочном отделениях, а также всеми, кто заинтересован в получении начальных сведений о проведении финансовых и коммерческих расчѐтов.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ «ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА»

1. Процентные деньги (проценты), основная сумма (капитал), норма процента (процентная ставка).
2. Простой процент. Уравнения простого процента. Обыкновенный простой процент, точный простой процент.
3. Время между датами. Вексель, дата погашения, сумма погашения, срок векселя. Понятие об оформлении векселей.
4. Дисконт, простой дисконт, выручка, норма дисконта. Уравнения простого дисконта.
5. Банковский дисконт (дисконт по норме дисконта или процент авансом); истинный дисконт (математический или дисконт по норме процента).
6. Основные понятия: составной итог (наращенная сумма), сложный процент, период начисления процентов (период конверсии), различные обозначения годовой номинальной нормы (ставки).
7. Непосредственное вычисление составного итога (наращенной суммы). Формула составного итога, множитель наращения (накопления).
8. Формула наращения со сложным процентом при дискретном изменении нормы (ставки) во времени. Множитель наращения.
9. Непрерывные проценты. Сила роста. Связь дискретных и непрерывных процентных ставок (норм).
10. Настоящая стоимость, сложный дисконт. Формула настоящей стоимости, множитель дисконтирования.
11. Эквивалентные нормы. Эффективная норма. Связь между эффективной нормой и номинальной нормой j_m. Эквивалентные нормы.
12. Составной итог и настоящая стоимость для дробных периодов времени. Практический метод.
13. Датированные суммы. Эквивалентность датированных сумм. Накопление и дисконтирование как простое преобразование заданной датированной суммы к другой дате.
14. Свойство транзитивности датированных сумм.
15. Датированные суммы серии. Свойство датированных сумм одной и той же серии.
16. Эквивалентные серии платежей. Уравнение эквивалентности (равенство стоимостей). Дата сравнения.
17. Определение даты погашения и понятие об определении нормы процента (ставки).
18. Понятие аннуитета. Интервалы платежа, срок аннуитета, определенный (детерминированный) аннуитет, зависимый (случайный) аннуитет. Обыкновенный, полагающийся, отсроченный аннуитет, простой аннуитет, общий аннуитет.
19. Непосредственное вычисление настоящей стоимости и итоговой суммы обыкновенного простого аннуитета.

20. Формулы вычисления настоящей стоимости и итоговой суммы обыкновенного простого аннуитета. Функции платежей $s_{\overline{n}|i} = s_{n,i}$ и $a_{\overline{n}|i} = a_{n,i}$.

21. Вычисление настоящей стоимости и итоговой суммы полагающегося аннуитета.

22. Отсроченные аннуитеты, период отсрочки. Вычисление настоящей стоимости отсроченного аннуитета.

23. Понятие о тождествах между функциями составных платежей.

24. Определение платежей аннуитета, понятие об определении процентных ставок.

25. Аннуитеты с неизвестными сроками.

26. Определение обыкновенного общего аннуитета.

27. Преобразование обыкновенных общих аннуитетов в простые.

28. Итоговая сумма и настоящая стоимость обыкновенного общего аннуитета.

29. Преобразование простых аннуитетов в общие.

30. Определение срока общего аннуитета.

31. Определение процентной ставки для общего аннуитета.

32. Определение амортизации.

33. Расписание амортизации.

34. Определение погасительной суммы долга. Доля покупателя и доля продавца.

35. Понятие о погасительном фонде. Расписание.

36. Метод погасительного фонда погашения долга.

37. Основные понятия вечной ренты.

38. Формула вычислений настоящей стоимости вечной ренты, простой и общей.

39. Полагающиеся ренты.

40. Альтернативный подход к анализу общей ренты.

41. Понятие о капитализации и инвестиционной стоимости.

42. Сравнение активов.

43. Облигации. Основные понятия. Инвестиционная норма.

44. Покупная цена для получения заданной нормы инвестиции.

45. Альтернативная формула для покупной цены.

46. Оценивание облигаций между датами начисления процентов.

47. Расписание облигаций.

48. Понятие о приобретении облигаций на рынке.

49. Обесценивание. Основные понятия.

50. Линейный метод или метод средних.

51. Метод погасительного фонда.

52. Истощение.

53. Акции. Основные понятия.

54. Виды акций.

55. Понятие о торговле акциями.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА»

При подготовке к практическому занятию по курсу «Введение в финансовую и актуарную математику» следует обратить внимание на его специфику, а именно:

1. Небольшой объем курса, носящего вводный характер, предполагает как достаточно сжатое изложение теоретического материала, так и разнообразие иллюстративных задач, относящихся к теме каждого занятия.
2. Поскольку курс имеет прикладную направленность, то для решения задач необходимо владение терминологией и основными понятиями, принятыми в финансовой теории и практике.
3. В данном курсе рассматриваются различные аспекты применения математики для проведения эффективного количественного финансового анализа.

В соответствии с этим при подготовке к каждому практическому занятию следует пользоваться конспектом лекций и данным методическим пособием и придерживаться следующих рекомендаций:

1. Заранее запишите тему практического занятия в тетради. Важно иметь отдельную тетрадь для решения практических задач по данному курсу, так как в отсутствии достаточной методической литературы по этой тематике подробные решения задач могут оказаться полезными как в дальнейших учебных курсах по специальности, так и в практической деятельности.
2. После указания темы составьте в этой же тетради краткий конспект основных теоретических сведений по теме предстоящего занятия. Теоретический материал, необходимый для решения задач в том числе основные понятия, приведены в первом разделе каждой темы данных методических указаний. Такая подготовка значительно облегчит решение задач на практическом занятии.
3. Так как математические формулы, используемые при решении практических задач курса, требуют большего понимания не столько с точки зрения математического содержания, сколько в плане их практического смысла, то полезно заранее усвоить смысл принятых в этих формулах обозначений.

На практическом занятии следует полностью выписывать условия задач второго раздела темы, подробно записывать решения с необходимыми пояснениями, выписывать ответ. Это поможет выполнить задачи *третьего раздела* темы, предлагаемые для проверки ее усвоения, а также будет полезно при подготовке к зачету или экзамену.

Практическое занятие 1
ПРОЦЕНТНЫЕ ДЕНЬГИ

Основные понятия: проценты, простой процент, уравнения простого процента. Вексель. Время между датами оформления векселей. Дисконт, норма дисконта, банковский дисконт, дисконт по норме процента.

1.1 Теоретические сведения

1.1.1 Основные понятия

При осуществлении различных практических финансовых и коммерческих операций различные субъекты хозяйствования (и юридические, и физические лица) заинтересованы в достижении некоторых экономических, а, следовательно, и финансовых целей. Другими словами, каждый намерен получить определенное вознаграждение от оказания коммерческих или финансовых услуг. При этом важен как размер предоставляемой услуги, так и фактор времени, в течение которого действует договор. Если договор заключен на длительный срок, то непременно учитывается ***принцип неравноценности денег*,** относящихся к различным моментам времени. Даже при отсутствии инфляции любая сумма, взятая взаймы, может быть инвестирована в некий процесс и принести доход не владельцу ценностей, а должнику. В этом смысле сегодняшние деньги ценнее будущих. Учет фактора времени в финансовых расчетах осуществляется с помощью ***начисления процентов***.

Под *процентными деньгами (процентами)* понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: предоставление денежной ссуды, продажа в кредит, помещение денег на сберегательный счет, покупка ценных бумаг и т. д.

Сумма денег, данных взаймы (инвестированных), называется *основной суммой* (*или первоначальной суммой долга, или капиталом*). При заключении соглашения между сторонами – *кредитором* и *заемщиком* – договариваются о *норме процента* – отношении суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный интервал времени, к основной сумме. Норма измеряется в *процентах* (1 % = 1 / 100 = 0,01). Число процентов может быть как целым, так и дробным. Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называется *периодом начисления*.

Интервал начисления – это минимальный период, по прошествии которого происходит начисление процентов.

Сумма процентных и основных денег, полагающаяся в конце срока, называется *итогом*, или *итоговой суммой*, или *наращенной* суммой.

При заключении конкретных сделок для обозначения нормы процента обычно используют другое название – *процентная ставка*.

Существуют различные способы начисления процентов. При этом основное различие состоит в выборе исходной базы (суммы) для начисления процентов. Если ставка процентов на протяжении всего срока применяется к одной и той же начальной сумме, то она называется *простой процентной ставкой*, а соответствующие начисления называются *простыми процентами*. Если же процентная ставка применяется к сумме вместе с начисленными до этого момента процентами, то она называется *сложной процентной ставкой*, а начисляемые проценты называются *сложными процентами*.

Процентные ставки могут быть *постоянными* (*фиксированными*) или *переменными* (*плавающими*). В первом случае в контракте указывается размер фиксированной ставки, во втором – указывается *базовая ставка* (*база*) и размер надбавки к ней – *маржи*.

Если временной интервал задается в форме промежутка между датами, то вычисляют *точное* число дней, считая первый и последний дни за один день. Такой способ называют определением *точного времени*. Если обе даты относятся к одному году, то используют *таблицу порядковых номеров дней в году* (приложение А, таблица А.1): из порядкового номера поздней даты достаточно вычесть порядковый номер начальной даты. В високосном году табличный порядковый номер дня после 28 февраля увеличивается на 1.

Приближенное время рассчитывают (без таблиц), полагая, что в каждом месяце 30 дней, а в году – 360 дней.

Оформление денежных отношений между партнерами финансовой сделки может производиться при помощи *векселей* (*расписок*), которые являются письменными обязательствами. В них указывается сумма денег, которые следует заплатить в установленный срок. Дата, до которой деньги должны быть выплачены, называется *датой погашения*, а сумма, которая должна быть выплачена, называется *суммой погашения*. Вексель должен быть составлен таким образом, чтобы однозначно были определены сумма погашения и дата погашения. При этом в документе указывается либо собственно сумма погашения, либо *лицевая сумма* (предоставляемая кредитором сумма) с указанием размера полагающихся процентов.

Дисконтом называется всякое уменьшение суммы денег – суммы счета, долга и т. д. – по какой-либо причине. В финансовой практике *дисконтированием* называют задачу, обратную задаче наращения процентов, то есть расчет начальной суммы P по известной сумме погашения S. Величину P, найденную дисконтированием, называют *современной величиной*, или *текущей стоимостью* суммы S. Проценты в виде разности $D = S - P$ называют *дисконтом*, или *скидкой*. Разность $S - D$ называют также *выручкой*.

Нормой дисконта, или *учетной ставкой,* для данного периода времени называется отношение дисконта за этот период к сумме погашения.

Введем следующие обозначения:

S – сумма погашения,

d – норма дисконта за один год,

t – продолжительность финансовой операции в годах.

Если дисконт вычисляется по формуле

$$D = S \cdot d \cdot t, \qquad (1.5)$$

то он называется *простым*, или *банковским*, *дисконтом*. Тогда

$$P = S - D. \qquad (1.6)$$

Подставляя (1.5) в (1.6), получим:

$$P = S \cdot \left(1 - d \cdot t\right). \qquad (1.7)$$

Величина $v = 1 - d \cdot t$ называется *множителем дисконтирования*.

Учет посредством нормы дисконта (учетной ставки) чаще всего осуществляется при временной базе K = 360 дней в году, число дней T берется точным, тогда $t = \frac{T}{K}$.

Банковский дисконт используется при *банковском учете* векселей, то есть приобретении банком векселя или другого платежного обязательства у владельца по цене с дисконтом. В банковской терминологии синонимом банковского дисконта является *процент авансом*, а синонимом нормы дисконта является *норма процента авансом*.

Соотношение между нормой процента и нормой дисконта определяется формулой

$$Pr = Sd. \qquad (1.8)$$

Различают два вида дисконтирования: банковское, или *дисконтирование по норме дисконта*, и математическое, или *дисконтирование по норме процента*. Первый способ уже рассмотрен – это использование формулы (1.7). Второй способ предполагает известные величины S, r и t, то есть решается задача, обратная наращению начальной суммы, а именно, из формулы (1.3) получаем:

$$P = S \cdot \frac{1}{1 + rt}. \qquad (1.9)$$

Дробь $\frac{1}{1 + rt}$ называют *дисконтным множителем*. Он показывает, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в в окончательной величине долга.

1.1.2 Формула наращения (итоговой суммы) по простым процентам

Согласно определению, данному в предыдущем пункте, *наращенной суммой* или *итоговой суммой* называется сумма процентных и основных денег, полагающаяся в конце срока начисления.

Пусть P – первоначальная (основная) сумма; r – норма процентов за один год; t – продолжительность периода времени (в годах).

Тогда если процент вычисляются по формуле

$$I = P \cdot r \cdot t, \qquad (1.1)$$

и выплачивается в конце периода, то выплачиваемые процентные деньги называются *простым процентом*. В этом случае норма процента (процентная ставка) за рассматриваемый период времени равна rt. Итоговая (наращенная) сумма равна:

$$S = P + I. \tag{1.2}$$

Равенства (1.1) и (1.2) называются *основными уравнениями простого процента*.

Подставляя (1.1) в (1.2), получаем формулу

$$S = P \cdot \left(1 + r \cdot t\right). \tag{1.3}$$

Последнюю формулу называют *формулой простых процентов*.

Множитель

$$\mu = 1 + r \cdot t \tag{1.4}$$

называется *множителем наращения простых процентов*.

Упражнение. Покажите, что увеличение процентной ставки или срока в k раз одинаково изменяют множитель наращения и итоговую сумму в $\dfrac{1 + k \cdot r \cdot t}{1 + r \cdot t}$ раз.

Если время задано в месяцах, то есть равно *l месяцев*, то при расчете процентов оно выражается в годах: $t = \dfrac{l}{12}$. Если время задано в днях, то есть равно d *дней,* то при расчете процентов применяются две временные базы (K – число дней в году): а) $K = 360$ дней – в каждом месяце считается по 30 дней, тогда $t = \dfrac{d}{K} = \dfrac{d}{360}$; б) $K = 365$ дней (в високосном году – 366 дней), тогда $t = \dfrac{d}{K} = \dfrac{d}{365}$ $\left(t = \dfrac{d}{K} = \dfrac{d}{366}\right)$. В случае а) простой процент называют *обыкновенным (коммерческим)*. В случае б) простой процент называют *точным*.

Расчет *числа дней* финансовой операции также может быть *точным или приближенным.* В первом случае вычисляется практическое число дней между двумя датами. Во втором – продолжительность определяется числом месяцев и дней операции, при этом продолжительность всех месяцев приближенно полагается равной 30 дням. В обоих случаях дата начала и конца операции считается за один день.

На практике применяются три варианта расчета простых процентов:

1) точные проценты с точным числом дней операции (схема 365/365, британская практика);

2) обыкновенные проценты с точным числом дней операции (схема 365/360, французская практика);

3) обыкновенные проценты с приближенным числом дней операции (схема 360/360, германская практика).

Формула наращенной суммы по дискретно изменяющимся процентным ставкам (нормам).

Если P – первоначальная сумма, r_j $(j=\overline{1,k})$ – j-я ставка, действующая t_j времени, то итоговая сумма равна:

$$S = P(1 + r_1 t_1 + r_2 t_2 + ... + r_k t_k) = P(1 + \sum_{j=1}^{k} r_j t_j). \qquad (1.5)$$

Множитель наращения в этом случае равен:

$$\mu = 1 + \sum_{j=1}^{k} r_j t_j. \qquad (1.6)$$

1.2 Практикум. (решение задач)

1.2.1. Петров взял в сбербанке кредит на сумму $30 \cdot 10^6$ *руб.* Если банк начисляет $600 \cdot 10^3$ *руб.* за использование этой суммы в течение 3 месяцев, то какой будет норма процента за этот период?

1.2.2. Найдите простой процент, множитель наращения, итоговую сумму за ссуду 12 *млн руб.* на 8 месяцев при годовой норме в 10 %. Как изменится итоговая сумма при увеличении нормы процента в 2 раза?

1.2.3. Найдите точный простой процент, множитель наращения, наращенную сумму, если 730 *млн руб.* даны взаймы на 200 дней при годовой норме 3 %. Как изменится наращенная сумма, если число дней уменьшить в два раза? Считайте год обычным (не високосным).

1.2.4. Найдите обыкновенный и точный простой процент и итоговую сумму за ссуду в 1099 *млн руб.* на 150 дней при годовой норме 12 %. Считайте год високосным.

1.2.5. Банк начисляет \$5 обыкновенного простого процента за использование \$300 в течение 60 дней. Какова норма простого процента таких сделок?

1.2.6. При приобретении товаров покупатель может заплатить или 500000 *руб*. сразу, или 520000 *руб*. через 4 недели. Если он займет деньги, чтобы заплатить наличными, то какая норма простого процента допустима для возмещения займа?

1.2.7. Пусть в договоре, рассчитанном на 2 года, принята ставка простых процентов на первый квартал 20 %, на второй и третий кварталы – на 2 % меньше, на четвертый, пятый и шестой кварталы – на 4 % меньше, на седьмой и восьмой – на 5 % меньше, чем ставка первого квартала. Найдите множитель наращения за весь срок и итоговую сумму, если первоначальная сумма равна 150 *млн руб*.

1.2.8. Установите дату погашения 90-дневной расписки (векселя), датированной 19 февраля 2012 года.

1.2.9. Кредит был выдан 15 октября 2011 года и должен быть возмещен 10 июня 2013 года. Найдите: а) точное время периода кредита; б) приближенное время действия кредита.

1.2.10. Через 150 дней после подписания договора клиент обязуется погасить кредит, выплатив 4 500 000 *руб*. Кредит выдается под 18 % годовых. Временная база составляет 365 дней. Какую сумму получает клиент?

1.2.11. Дана сумма погашения S = 180 *млн руб*., норма дисконта за год равна 5 %. Вексель оформляется на два месяца. Найдите простой дисконт и выручку этой операции.

1.2.12. Через 120 дней предприятие должно получить по векселю 100 *млн руб*. Банк приобрел этот вексель с дисконтом. Банк учел вексель по учетной ставке 20 % годовых (год принять равным 360 дней). Определите полученную предприятием сумму и дисконт.

1.2.13. Банк заплатил 44 *млн руб*. за вексель с суммой погашения 45 *млн руб*. через 4 месяца. Какова норма дисконта? Какова норма процента?

1.2.14. 20 октября 2018 года Иванов продал Беларусбанку следующий вексель:

13 января 2018 года. Через год после указанной даты я обязуюсь выплатить Иванову 144000 *руб*. и простой процент 6 % годовых. Подпись: *Петров*.

Если банк использует 7%-ную норму процента авансом, то вычислите:

а) какой будет выручка; б) какую норму процента реализует банк при такой инвестиции.

1.3 Задания для контроля знаний.

Для проверки знаний, полученных слушателями по пройденной теме, предлагается решить следующие задачи.

1.3.1. Индивидуальный предприниматель взял в сбербанке кредит на сумму $200 \cdot 10^6$ *руб.* Если банк начисляет $2{,}5 \cdot 10^6$ *руб.* за использование этой суммы в течение полугодия, то какой будет норма процента за этот период?

1.3.2. Банк предоставил кредит 146000 *руб.* на 150 дней при годовой норме 9 %. Найдите точный простой процент, множитель наращения, наращенную сумму за этот срок. Как изменится наращенная сумма, если число дней увеличить в два раза? Считайте год обычным (не високосным).

1.3.3. Найдите обыкновенный и точный простой процент и итоговую сумму за ссуду в 2198000 *руб.* на 250 дней при годовой норме 18 %. Считайте год високосным.

1.3.4. Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 10 % годовых, а на каждый последующий – на 1 % меньше, чем на предыдущий. Найдите множитель наращения за весь срок и итоговую сумму, если первоначальная сумма равна 500 *руб*.

1.3.5. Ссуда выдана 15 февраля 2012 года и возвращена 17 ноября 2012 года. Найдите точное и приближенное время периода ссуды.

1.3.6. 5 октября 2012 года Иванов занял у Петрова 8 *млн руб*. и согласился вернуть долг с 200 000 *руб.* процентов через 3 месяца. Оформите вексель двумя способами.

1.3.7. Выручка равна *250 млн руб*. Норма дисконта 8 %. Время действия сделки от 15 мая до 26 июля одного и того же года. Найдите дисконт и сумму погашения.

1.3.8. Вексель оформляется на три месяца. Дана сумма погашения S = 240 *млн руб*., норма дисконта за год равна 8 %. Найдите простой дисконт и выручку этой операции.

1.3.9. Через 100 дней после подписания договора клиент обязуется уплатить 800 000 *руб*. Кредит выдается под 15 % годовых. Временная база составляет 365 дней. Какую сумму получает клиент?

1.3.10. 18 ноября 2017 года владелец векселя продал банку следующий вексель:

11 февраля 2017 года.
Через год после указанной даты я обязуюсь выплатить Иванову 200 *млн. руб*. и простой процент 8 % годовых.
Подпись: *Петров*.

Если банк использует десятипроцентную норму процента авансом, то вычислите:

а) какой будет выручка; б) какую норму процента реализует банк при такой инвестиции.

Практическое занятие 2 (часть 1)
СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ. УРАВНЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Основные понятия: составной итог и сложные проценты. Годовая номинальная норма (ставка). Основная формула составного итога. Настоящая стоимость, сложный дисконт, дисконтирование, годовая эффективная норма, эквивалентные нормы, составной итог и настоящая стоимость для дробных периодов времени. Датированные суммы. Эквивалентность датированных сумм. Серии датированных сумм. Эквивалентные серии платежей.

2.1 Теоретические сведения.

Если в долгосрочных финансовых кредитных операциях проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к основной сумме долга, то применяются *сложные проценты*. Когда процент добавляется к основной сумме и эта новая сумма используется как основная для следующего временного периода, и данная процедура повторяется определенное число периодов, то окончательная сумма называется *составным итогом* или *наращенной суммой.* Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют *капитализацией процентов*. *Периодом начисления процентов* или *периодом конверсии* называют промежуток времени между двумя последовательными начислениями процентов.

Для записи *формулы наращения* будем применять обозначения:

P – первоначальная сумма,
S – составной итог (наращенная сумма) на конец срока,
i – норма процентов (ставка) за период конверсии,
$j = j_m$ – годовая номинальная норма процентов, которая конвертируется m раз в году,
n – число периодов начисления процентов (число конверсий).

Тогда составной итог (наращенная сумма) будет определяться формулой

$$S = P \cdot (1+i)^n, \tag{2.1}$$

где

$$i = \frac{j}{m} = \frac{j_m}{m}.$$

Проценты за этот срок составят:

$$I = S - P = P((1+i)^n - 1). \tag{2.2}$$

Часть из них получается за счет начисления процентов на проценты. Она составляет

$$I_p = P((1+i)^n - (1+ni)). \tag{2.3}$$

Величину

$$\mu_н = (1+i)^n \qquad (2.4)$$

называют *множителем наращения*. Он показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной. Значения этого множителя приводятся в *таблицах сложных процентов*. Равенство (2.1) называют *основной формулой сложного процента*, ее можно записать в виде

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^N = P\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^N = P\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}, \qquad (2.5)$$

где N – общее количество периодов конверсии. При этом, если срок финансовой операции n лет, то $N = m \cdot n$.

Формула наращения по сложным процентам при дискретном изменении норм (ставок) во времени имеет вид

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_k)^{n_k} = P\prod_{l=1}^{k}(1+i_l)^{n_l}, \qquad (2.6)$$

где i_l, $l=\overline{1,k}$, – последовательные значения норм (ставок), действующих n_l периодов конверсии. Множитель наращения

$$\mu = \prod_{l=1}^{k}(1+i_l)^{n_l}. \qquad (2.7)$$

Эффективной нормой (ставкой) $i_{эф}$ называется годовая норма сложных процентов, дающая тот же финансовый результат, что и m – разовое наращение в год по ставке $i = \frac{j_m}{m}$. Связь между j_m и $i_{эф}$ (другое обозначение – r) имеет вид:

$$1 + i_{эф} = \left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m, \qquad (2.8)$$

откуда, зная две величины, можно найти третью, например:

$$i_{эф} = \left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m - 1, \qquad (2.9)$$

$$j_m = m\left[\left(1+i_{эф}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right]. \qquad (2.10)$$

При непрерывном начислении процентов итоговая сумма равна:

$$S = \lim_{m\to\infty} P \cdot \left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn} = Pe^{\delta n}. \qquad (2.11)$$

Величину δ называют *силой роста*. Она представляет собой номинальную норму (ставку) процентов при $m \to \infty$. Связь между дискретными и непрерывными процентными ставками имеет вид:

$$\left(1+i\right)^n = e^{\delta n}, \tag{2.12}$$

откуда

$$\delta = \ln(1+i), \text{ а } \quad i = e^{\delta} - 1. \tag{2.13}$$

Эквивалентными нормами называются любые две нормы процентов, дающие одну и ту же итоговую сумму в конце года. Связь между эквивалентными дискретными нормами ($j_k \sim j_m$) имеет вид:

$$\left(1+\frac{j_k}{k}\right)^k = \left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m, \tag{2.14}$$

откуда, зная три величины, можно найти четвертую. В математике финансов всегда разрешается заменять заданную норму процентов эквивалентной ей нормой.

Настоящей (современной) стоимостью P на данную дату для суммы S на более позднюю дату является основная сумма, которая, будучи инвестирована при норме *i*, даст итоговую сумму *S*. Разность $S - P = D$ называется *сложным дисконтом*, а процесс определения *P* по *S* называется *дисконтированием*. Из формулы (2.1)

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S\cdot(1+i)^{-n}. \tag{2.15}$$

Множитель $v_{n,i} = \left(1+i\right)^{-n}$ называется *множителем дисконтирования*. Дисконтирование по формуле (2.15) называют *математическим (математический учет)*. Дисконтирование по сложной учетной ставке (норме) $d_{сл}$ осуществляется по формуле

$$P = S\cdot(1-d_{сл})^n, \tag{2.16}$$

и его называют *банковским учетом*. Дисконт в этом случае равен:

$$D = S - P = S - S(1-d_{сл})^n = S\left[1-(1-d_{сл})^n\right]. \tag{2.17}$$

При использовании значений денежных сумм в финансовых расчетах всегда имеется в виду определенная дата выполнения той или иной операции. *Датированной суммой* называется сумма платежа вместе с датой его погашения. При сравнении датированных сумм надо обязательно знать норму процентов. Если человек имеет возможность в течение некоторого времени инвестировать свои деньги, получая 8 % годовых, то говорят, что его деньги стоят $j_1 = 8\,\%$. Датированные суммы сравниваются по следующему *правилу эквивалентности*: ***сумма P, полагающаяся на данную дату, эквивалентна при данной норме сложного процента i сумме S, полагающейся на n периодов конверсии позже, если справедливо любое из равенств:***

$$S = P(1+i)^n \quad \textit{или} \qquad P = S(1+i)^{-n}. \tag{2.18}$$

Тогда будем использовать обозначение $S \sim P$.

Из формулы (2.18) следует, что наращение и дисконтирование можно рассматривать как преобразование заданной датированной суммы к другой дате. Преобразование делается в соответствии со следующей временной диаграммой.

Прошлая дата	*Настоящая дата*	*Будущая дата*
$D(1+i)^{-n}$	D	$D(1+i)^{n}$

Рисунок 2.1 – Временная диаграмма преобразования датированных сумм

Прошлая и будущая суммы эквивалентны датированной сумме *D*.

Свойство 1 (транзитивность). Если при данной норме сложного процента датированная сумма *A* эквивалентна *B* и *B* эквивалентна *C*, то *A* эквивалентна *C*. Кратко: $A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Серии датированных сумм. Пусть имеется несколько (серия) датированных сумм, погашаемых в различные даты. Если все их преобразовать в эквивалентные суммы с одной и той же датой погашения, то сумма таких эквивалентных сумм называется *датированной суммой серии.* Она изменяется от даты, к которой преобразованы все суммы серии. Для различных датированных сумм одной и той же серии справедливо:

Свойство 2. Датированные суммы одной и той же серии, определенные для различных дат, являются эквивалентными.

Эквивалентные серии платежей. Одной из важных проблем в финансовой математике является замена данной серии платежей или других обязательств на эквивалентную им серию платежей или обязательств. Например, ноутбук стоит 4,5 *млн руб*. наличными. Однако мы можем купить его при помощи эквивалентной серии небольших ежемесячных платежей. Сумма серии платежей зависит от используемой нормы процентов и даты, на которую вычисляется сумма. При данной норме процента *две серии платежей являются эквивалентными*, если датированные суммы этих серий на любую общую дату равны.

Уравнением эквивалентности или *равенством стоимостей* называется равенство, устанавливающее, что датированные суммы двух серий на общую дату равны между собой. Дата, используемая в этом равенстве, называется *датой сравнения*. Из свойства транзитивности датированных сумм следует, что в качестве даты сравнения может быть использована любая дата. Так же, как и суммы серий, разности, рассчитанные на различные даты, будут эквивалентными.

2.2 Практикум (решение задач)

2.2.1. В кредитном договоре на сумму $2 \cdot 10^6$ рублей и сроком на 4 года зафиксирована ставка сложных процентов, равная 20 % годовых. Найдите итоговую сумму: а) непосредственно, б) используя основную формулу сложных процентов.

2.2.2. В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 10 процентов годовых: в первые два года ставка не меняется (то есть составляет 10 % годовых), в третий год маржа (добавка к годовым процентам) – 5 %, в четвертый и пятый годы маржа – 10 %.

Вычислите величину множителя наращения и итоговую сумму, если первоначальная сумма равна: а) $30 \cdot 10^6$ *руб.*, б) $ 110 000.

2.2.3. Через сколько лет первоначальная сумма депозита возрастет в два раза, если на вложенные средства начисляются проценты в размере 9,75 % годовых: а) используются простые проценты, б) используются сложные проценты с полугодовой капитализацией.

2.2.4. Ссуда $50 \cdot 10^6$ *руб.* предоставлена на 29 месяцев. Норма процентов $j_4 = 60\ \%$. Найдите наращенную сумму.

2.2.5. Какая эффективная норма эквивалентна номинальной норме $j_{12} = 24\ \%$?

2.2.6. Через 4 года предприятию будет выплачена сумма $200 \cdot 10^6$ *руб.* Найдите ее настоящую стоимость и дисконт при условии, что применяется ставка сложных процентов: а) $j_1 = 10\ \%$, б) $j_4 = 20\ \%$.

2.2.7. Годовая ставка сложных процентов равна 20 %. Чему равна эквивалентная сила роста?

2.2.8. Долг $20 \cdot 10^6$ *руб.* следует выплатить через 8 лет. Если деньги стоят $j_1 = 10\ \%$, то найдите эквивалентный долг через а) 1 год, б) 10 лет. Докажите, что полученные долги эквивалентны а) по определению, б) по свойству транзитивности.

2.2.9. Вексель на $40 \cdot 10^6$ *руб.* со сложным процентом за три года при норме $j_6 = 24\ \%$ должен быть погашен через три года. Какая сумма при норме $j_2 = 10\ \%$ эквивалентна сумме векселя через а) 8 лет, б) 12 лет?

2.2.10. Если деньги стоят $j_4 = 20\ \%$, то найдите одноразовую выплату, эквивалентную серии из двух платежей: $20 \cdot 10^6$ *руб.*, погашаемых через 3 года; $50 \cdot 10^6$ *руб.*, погашаемых через 5 лет, для трех случаев погашения: а) в настоящее время, б) через 3 года, в) через 1 год. Сравните все три датированные суммы серий а) с помощью свойства, б) по определению эквивалентности.

2.2.11. Если деньги стоят 8 % годовых, то какие равные платежи через 2 года и 5 лет будут эквивалентно заменяться следующей серией обязательств: выплатить $200 \cdot 10^6$ *руб.* через 3 года и $500 \cdot 10^6$ *руб.* с накопленным процентом через 7 лет при норме $j_2 = 6\ \%$?

2.2.12. Погашаются $\$100 \cdot 10^3$ через 4 года и $\$300 \cdot 10^3$ – через 6 лет. Если деньги стоят $j_1 = 4\ \%$, то через сколько лет оба платежа заменит выплата в $\$300 \cdot 10^3$?

2.3 Задания для контроля знаний.

Для проверки знаний, полученных слушателями по пройденной теме, предлагается решить следующие задачи.

2.3.1. Ссуда $20 \cdot 10^6$ *руб.* предоставлена на 28 месяцев. Норма процентов – 60 % годовых. Проценты начисляются ежеквартально. Найдите коэффициент наращения и итоговую (наращенную) сумму.

2.3.2. В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20 % годовых плюс маржа 10 % в первые два года, 8 % – в третий и 5 % – в четвертый год. Вычислите множитель наращения и наращенную сумму, если первоначальная сумма равна: а) $800 \cdot 10^6$ *руб.*, б) 20 000 $.

2.3.3. Найдите номинальную ставку при ежеквартальном начислении сложных процентов, эквивалентную эффективной ставке в размере 12 % годовых.

2.3.4. Через 5 лет предприятию будет выплачена сумма $800 \cdot 10^6$ *руб.* Найдите ее современную стоимость и дисконт при условии, что применяется ставка сложных процентов $j_2 = 10\ \%$.

2.3.5. Долг $20 \cdot 10^6$ *руб.* следует выплатить через 10 лет. Найдите эквивалентный долг через а) 1 год, б) 15 лет, если норма процентов j_1 установлена в размере 5 %. Докажите, что полученные долги эквивалентны. Проверьте а) по определению, б) по свойству транзитивности, что найденные долги эквивалентны.

2.3.6. Найдите датированную по окончании двух лет сумму при норме процентов $j_2 = 5\ \%$, эквивалентную 5 *млн руб.* вместе с процентами за 8 лет при норме процентов $j_4 = 8\ \%$.

2.3.7. Деньги стоят $j_4 = 12\ \%$. Найдите датированную сумму для серии платежей: $10 \cdot 10^6$ *руб.* через 2 года и $20 \cdot 10^6$ *руб.* через 5 лет в различные моменты времени: а) в настоящее время, б) через 3 года, в) через 6 лет. Проверьте эквивалентность найденных датированных сумм.

2.3.8. Погашаются 100 тысяч долларов через 5 лет и 200 тысяч долларов – через 10 лет. Через сколько лет оба платежа эквивалентно заменит выплата в 250 тысяч долларов при установленной ставке $j_1 = 4\ \%$?

Практическое занятие 2 (часть 2)
ПРОСТЫЕ АННУИТЕТЫ

Основные понятия: интервал платежа, срок аннуитета, виды аннуитетов. Настоящая стоимость и итоговая сумма обыкновенного аннуитета. Полагающиеся аннуитеты. Схемы вычисления настоящей стоимости и итоговой суммы. Отсроченные аннуитеты, аннуитеты с неизвестными сроками. Определение платежей аннуитета.

2.4 Теоретические сведения

2.4.1 Основные определения

При решении задач используются следующие понятия:

– *аннуитет* – последовательность периодических платежей, обычно одинаковых, сделанных через одинаковые промежутки времени (например, премии страхования жизни, платежи рассрочки, платежи ренты и т. д.);

– *интервал платежа* – период времени между двумя последовательными платежами;

– *срок аннуитета* – время от начала первого интервала платежа до окончания последнего интервала платежа;

– *определенный (детерминированный) аннуитет* – аннуитет, для которого известны фиксированные даты начала и окончания срока;

– *зависимый (случайный) аннуитет* – аннуитет, для которого срок зависит от некоторого неопределенного события (например, от смерти человека);

– *обыкновенный аннуитет* – аннуитет, в котором платежи производятся в моменты окончания интервалов платежей;

– *полагающийся аннуитет* – аннуитет, в котором платежи производятся в начальные моменты интервалов платежей;

– *простой аннуитет* – аннуитет, для которого интервал платежа совпадает с периодом начисления процентов; в противном случае аннуитет называется *общим*;

– *настоящая стоимость аннуитета* – датированная сумма, эквивалентная всей серии платежей, на начало срока аннуитета;

– *итоговая (наращенная) сумма аннуитета* – датированная сумма, эквивалентная всей серии платежей, на окончание срока аннуитета.

Замечание. В дальнейшем, согласно принятой на практике традиции, под термином *аннуитет* будет пониматься *обыкновенный аннуитет* (слово *обыкновенный* будем опускать), если не оговорено другое.

2.4.2 Настоящая стоимость и итоговая сумма обыкновенного простого аннуитета

Основная задача об аннуитетах – это задача вычисления полной стоимости серии платежей на некоторую заданную дату. Можно решать ее, используя уравнение эквивалентности. Однако вычисление полной стоимости можно значительно упростить, используя свойство регулярности платежей.

В дальнейшем в этой теме мы будем рассматривать только обыкновенные простые аннуитеты – коротко *ПА*.

Введем обозначения:

S – итоговая сумма *ПА*;

A – настоящая стоимость *ПА*;

R – сумма каждого платежа *ПА*;

n – число платежей *ПА*;

i – норма процентов (ставка) за интервал платежа.

Тогда итоговая сумма и настоящая стоимость *ПА* находятся по формулам:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = R\,s_{\overline{n}|i}, \tag{2.19}$$

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R\,a_{\overline{n}|i}, \tag{2.20}$$

где функции составных платежей имеют вид:

$$s_{\overline{n}|i} = s_{ni} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{2.21}$$

$$a_{\overline{n}|i} = a_{ni} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{2.22}$$

Для нахождения их значений используются таблицы (приложение А, таблицы А.2, А.3).

Так как A и S – датированные суммы одной и той же серии платежей, то $A \sim S$. Следовательно, выполняются условия:

$$S = A(1+i)^n,\ \text{или}\ \ A = S(1+i)^{-n}. \tag{2.23}$$

В формулы (2.19) и (2.20) входят четыре величины: S, R, n, i и A, R, n, i. Зная три из них, можно найти четвертую. Например, периодические платежи находятся из формул (2.19) и (2.20) как

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n}|i}} = S\frac{1}{s_{\overline{n}|i}}, \tag{2.24}$$

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}} = A\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}. \tag{2.25}$$

Из формул (2.21) и (2.22) следует, что

$$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n a_{\overline{n}|i}, \tag{2.26}$$

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}. \tag{2.27}$$

Настоящей стоимостью ***полагающегося*** *аннуитета (ППА)* называется эквивалентная сумма серии платежей **на дату начала** первого интервала платежей.

Итоговой суммой ППА называется эквивалентная сумма серии платежей **на дату последнего** платежа.

Пусть A – настоящая стоимость ППА, S – его итоговая сумма, R – величина периодических платежей, i – норма процентов за интервал платежей ППА, состоящего из n платежей. Временная диаграмма будет иметь вид:

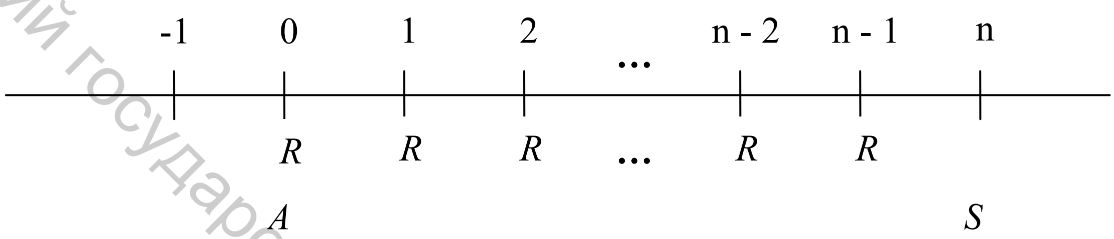


Рисунок 2.2 – Временная диаграмма *ППА*

При ППА каждый платеж делается на один интервал раньше, чем при обыкновенном ПА. Укажем способы определения величин A и S для ППА.

Первый способ определения A. Выпишем уравнение эквивалентности с датой сравнения – началом интервала платежа, предшествующего первому платежу:

$$A(1+i)^{-1} = R a_{\overline{n}|i}, \tag{2.28}$$

откуда найдем

$$A = (1+i) R a_{\overline{n}|i}. \tag{2.29}$$

Второй способ определения A. Выписываем уравнение эквивалентности с датой сравнения – началом срока аннуитета. Первый платеж рассматриваем как отдельную выплату, а остальные платежи – как n-1 платеж ПА:

$$A = R + R a_{\overline{n-1}|i} = R(1 + a_{\overline{n-1}|i}). \tag{2.30}$$

Первый способ определения S. Выпишем уравнение эквивалентности с датой сравнения – датой последнего платежа:

$$S(1+i)^{-1} = R s_{\overline{n}|i}, \tag{2.31}$$

откуда

$$S = R(1+i)\, s_{\overline{n}|i}. \tag{2.32}$$

Второй способ определения S. Добавляем платеж R на конец срока аннуитета и датой сравнения считаем конец срока аннуитета:

$$S + R = R\, s_{\overline{n+1}|i}$$

откуда

$$S = R s_{\overline{n+1}|i} - R = R(s_{\overline{n+1}|i} - 1)\,. \tag{2.33}$$

Для аннуитетов с неизвестными сроками число периодов платежей n практически никогда не бывает целым. Поэтому приходится использовать еще один платеж F, отличный от R, для того, чтобы обеспечить эквивалентность выплат. Определение величины последнего платежа производится с использованием составления соответствующего уравнения эквивалентности. Определение заключительного платежа и нормы процентов можно находить и приближенно с помощью линейной интерполяции.

Напомним, что *простой аннуитет* (*ПА*) – это аннуитет, для которого интервал платежа совпадает с периодом начисления процентов; в противном случае аннуитет называется *общим*.

Возникает задача замены общего аннуитета таким эквивалентным обыкновенным простым аннуитетом, для которого можно воспользоваться уже имеющимися формулами, а также таблицами значений $s_{\overline{n}|i}$, $a_{\overline{n}|i}$.

2.4.3 Преобразование обыкновенных общих аннуитетов в простые

Введем следующие обозначения:

W – величина платежа общего аннуитета;

p – количество платежей общего аннуитета в год;

m – число периодов начисления процентов в год;

R – платежи *ПА*, являющегося эквивалентной заменой общего аннуитета, которые производятся m раз в год;

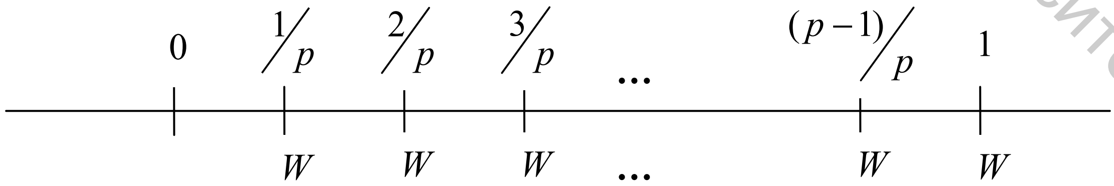
i – норма процента за период конверсии.

Если аннуитет заменяется другим аннуитетом, то должны быть выполнены следующие два условия:

а) норма процента должна быть той же или эквивалентной ей;

б) стоимости обоих аннуитетов должны быть одинаковыми в любой момент времени.

Общий и простой аннуитеты с указанными параметрами удобно представить на следующих временных диаграммах:



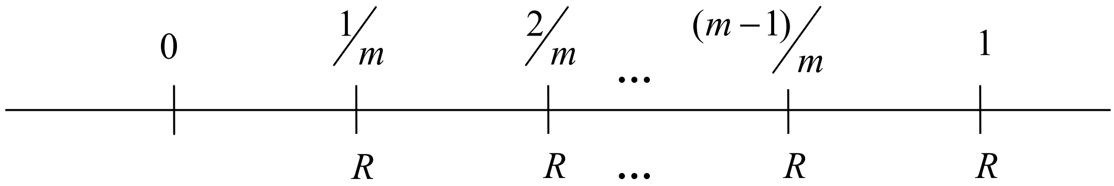


Рисунок 2.3 – Временная диаграмма общего и простого аннуитетов

Определим норму процента i^* за интервал платежа общего аннуитета, которая эквивалентна норме i за период начисления процентов. Тогда

$$(1+i^*)^p=(1+i)^m. \tag{2.34}$$

Приравняем аннуитеты (итоговые суммы) в конце года:

$$Rs_{\overline{m}|i}=Ws_{\overline{p}|i^*}. \tag{2.35}$$

Так как

$$s_{\overline{m}|i}=\frac{(1+i)^m-1}{i},\quad s_{\overline{p}|i^*}=\frac{(1+i^*)^P-1}{i^*},$$

то

$$R\frac{(1+i)^m-1}{i}=W\frac{(1+i^*)^p-1}{i^*}. \tag{2.36}$$

В силу равенства (2.34) равенство (2.35) упрощается:

$$\frac{R}{i}=\frac{W}{i^*}. \tag{2.37}$$

Из формулы (2.34) находим: $1+i^*=(1+i)^{\frac{m}{p}}$; $i^*=(1+i)^{\frac{m}{p}}-1$. Подставляя последнее выражение в формулу (2.37), окончательно получаем:

$$R=W\frac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}}-1}. \tag{2.38}$$

Заметим, что

$$\frac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}}-1}=\frac{1}{\frac{(1+i)^{\frac{m}{p}}-1}{i}}=\frac{1}{s_{\overline{\frac{m}{p}}|i}},$$

так что

$$R=W\frac{1}{s_{\overline{\frac{m}{p}}|i}}\ \text{или}\ W=Rs_{\overline{\frac{m}{p}}|i}. \tag{2.39}$$

Значение дроби $\frac{m}{p}$ может быть любым, но на практике обычно встречается один из вариантов: а) $\frac{m}{p}$ – целое число, тогда можно использовать таблицы для целочисленных значений аргумента функции составных платежей; б) $\frac{m}{p}$ – дробь вида $\frac{k}{12}$ (k =1,2, 3, 4, 6), для таких значений аргумента также составлены таблицы.

2.4.4 Итоговая сумма и настоящая стоимость обыкновенного общего аннуитета

Идея определения итоговой суммы и настоящей стоимости обыкновенного общего аннуитета остается прежней: преобразовать общий аннуитет в эквивалентный ему *ПА* и затем определить требуемую характеристику методами, известными для *ПА*. Аналогично поступают и с отсроченными общими аннуитетами. В пункте 2.5 это будет рассмотрено на примерах.

Преобразование простых аннуитетов в общие выполняется с помощью второй формулы (2.39):

$$W = Rs_{\overline{\frac{m}{p}}|i}$$

с использованием таблиц значений функции составных платежей.

Идея нахождения *общего аннуитета* состоит в определении простого аннуитета для выполнения намеченных целей, а затем преобразования его в эквивалентный общий аннуитет. Такая задача возникает, например, тогда, когда надо найти платежи общего аннуитета.

Для определения *срока общего аннуитета* следует сначала преобразовать его в эквивалентный простой и затем найти срок полученного *ПА* известными методами. Обычно для завершения аннуитета устанавливается несколько меньшая сумма заключительного платежа по сравнению с регулярными платежами ($F < R$).

2.5 Практикум (решение задач)

2.5.1. Найдите настоящую стоимость и итоговую сумму ПА, состоящего из 7 полугодовых платежей по $25 \cdot 10^6$ *руб.*, если деньги стоят $j_2 = 6\,\%$: а) непосредственно (составляя уравнение эквивалентности); б) используя формулы настоящей стоимости и итоговой суммы.

2.5.2. Компания выплачивает заем, делая платежи по \$10000 в конце каждого квартала. Процентная ставка при получении займа установлена как $j_4 = 8\,\%$. Какова неуплаченная сумма займа в настоящий момент, если: а) осталось сделать 20 платежей; б) кроме 20 платежей необходим один взнос в размере \$25000 через 3 месяца после последнего платежа в \$10 000?

2.5.3. Беларусбанк начисляет проценты с нормой $j_6 = 18\,\%$. Если на депозитный счет в начале каждого промежутка в два месяца вносится по 2 *млн руб.*, то какая сумма будет лежать на этом счете через 5 лет?

2.5.4. Фирма получила определенную сумму денег, которую она будет возмещать, выплачивая по 30000 *у. е.* в месяц. Первая выплата должна быть сделана через 3 года, а последняя – через 6 лет от даты заключения сделки. Какую сумму получила фирма в день заключения сделки при норме процента $j_{12} = 24\,\%$?

2.5.5. Вклады по 10000 *руб.* делаются в банк по полугодиям при норме процента $j_2 = 6\,\%$. На какую дату попадает заключительный вклад, не превышающий 10 000 *руб.*, если сумма на депозитном счете становится равной 400000 *руб.*? Каким будет заключительный вклад?

2.5.6. Фирма получает платежи по 2 *млн руб*. в конце каждого квартала. Какие ежемесячные выплаты будут эквивалентны таким платежам, если установлена процентная ставка $j_{12} = 6\,\%$?

2.5.7. Преобразуйте общий аннуитет с ежеквартальными платежами по $5 \cdot 10^6$ *руб.* в *ПА* в следующих случаях: а) установлена норма процентов $j_{12} = 5\,\%$; б) установлена эффективная норма в размере 5 %.

2.5.8. Сидоров вносит в банк по $3 \cdot 10^6$ *руб.* в конце каждого полугодия при установленной процентной ставке $j_4 = 8\,\%$. Какая сумма будет у него в банке через 10 лет?

2.5.9. Квартира, оцененная в 200 *млн руб*., продается за 60 *млн руб*. наличными с последующими одинаковыми полугодовыми платежами, производимыми в конце полугодия, в течение 20 лет. Какими должны быть платежи при норме процента $j_4 = 8\,\%$?

2.5.10. Сколько ежемесячных платежей по 500 *тыс. руб*. каждый потребуется для ликвидации долга в 10 *млн руб*., если норма процентов равна 6 %, $m = 2$ и первая выплата делается через месяц после займа?

2.6 Задания для контроля знаний

Для проверки усвоения пройденной темы предлагается решить следующие задачи.

2.6.1. Найдите настоящую стоимость и итоговую сумму *ПА*, состоящего из 6 квартальных платежей по $30 \cdot 10^6$ *руб.*, если дана ставка $j_4 = 12\,\%$: а) непосредственно (составляя уравнение эквивалентности); б) используя формулы настоящей стоимости и итоговой суммы *ПА*.

2.6.2. Сидоров выплачивает заем, делая платежи по 200000 *руб.* в конце каждого месяца. Процентная ставка при получении займа установлена как $j_{12} = 24\,\%$. Какой является неуплаченная сумма займа в настоящий момент, если: а) осталось сделать 30 платежей; б) кроме 30 платежей необходим еще один взнос в размере 700 000 *руб.* через два месяца после последнего платежа в размере 200 000 *руб.*?

2.6.3. Компания получила определенную сумму денег, которую она будет возмещать, выплачивая по 100 000 р*уб.* в квартал. Первая выплата должна быть сделана через два года, а последняя – через 7 лет от даты заключения сделки. Какую сумму получила фирма в день заключения сделки, если установлена процентная ставка $j_4 = 12\,\%$?

2.6.4. Вклады по 200 000 *руб.* делаются в банк поквартально при норме процента $j_4 = 12\,\%$. На какую дату попадает заключительный вклад, не превышающий 200 000 *руб*., если сумма на депозитном счете становится равной 3 000 000 *руб.*? Каким будет заключительный вклад?

2.6.5. Компания платит банку по 10 *млн руб*. в конце каждого полугодия. Преобразуйте этот аннуитет в эквивалентный *ПА* в следующих случаях: а) установлена норма процентов $j_{12} = 24\,\%$; б) установлена эффективная норма в размере 6 %.

2.6.6. Иванов вносит в банк по 6 *млн руб*. в конце каждого квартала при установленной процентной ставке $j_{12} = 24\,\%$. Какая сумма будет у него в банке через 5 лет?

2.6.7. Дом, оцененный в 140 *млн руб*., продается за 40 *млн руб*. наличными с одинаковыми полугодовыми платежами, производимыми в конце полугодия, в течение последующих 20 лет. Какими должны быть платежи при норме процента $j_1 = 4{,}5\,\%$?

Практическое занятие 3 (часть 1)
ВЕЧНАЯ РЕНТА. ОБЛИГАЦИИ

Основные понятия: понятие ренты, виды ренты. Нахождение настоящей стоимости обыкновенной простой ренты, общей ренты, полагающейся ренты. Второй подход к анализу общей ренты. Капитализация, капитализированная стоимость. Понятие о сравнении активов на основе инвестиционной стоимости и на основе стоимости продукции. Понятие облигации, облигации на предъявителя и именные. Номинал, дата выкупа, инвестиционная норма. Покупная цена для получения заданной нормы инвестиции. Оценивание облигаций между датами начисления процентов. Понятие об определении доходности.

3.1 Теоретические сведения

Вечная рента – это аннуитет, платежи которого продолжаются в течение неограниченного срока. Определения, такие как *простая, общая, обыкновенная, отсроченная* и т. д., по отношению к вечным рентам имеют тот же смысл, который они имеют при описании аннуитетов (пункт 2.4.1). В частности, рента называется *простой*, если периоды платежей совпадают с интервалами начисления процентов, в противном случае она называется *общей*.

Пусть A – настоящая стоимость обыкновенной простой ренты, i – норма процента за период, при которой инвестируется A, и R – платеж ренты. Тогда A должна быть эквивалентна серии платежей R, показанной на временной диаграмме:

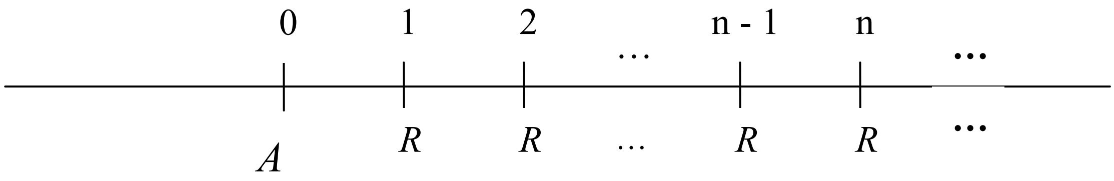


Рисунок 3.1 – Временная диаграмма вечной ренты

Тогда настоящая стоимость простой ренты равна:

$$A = \frac{R}{i}. \tag{3.1}$$

Общая рента преобразуется в эквивалентную простую ренту по тем же формулам, что и для аннуитетов, то есть

$$R = W\frac{1}{s_{\overline{\frac{m}{p}}|i}}, \tag{3.2}$$

после чего настоящая стоимость находится по формуле (3.1).

Настоящая стоимость *простой полагающейся ренты* вычисляется по формуле

$$A = R + R/i. \tag{3.3}$$

Настоящая стоимость *общей полагающейся ренты* находится как

$$A = W + R/i = W + W\frac{1}{is_{\overline{\frac{m}{p}}|i}}. \tag{3.4}$$

Общая полагающаяся рента с платежами W может быть заменена эквивалентной простой рентой с платежами R, определяемыми по формуле

$$R = W\frac{1}{a_{\overline{\frac{m}{p}}|i}}, \tag{3.5}$$

тогда настоящая стоимость этой ренты определяется по формуле (3.1).

Другой способ анализа общих вечных рент заключается в том, что общая вечная рента преобразуется в простую вечную ренту заменой данной нормы процента на эквивалентную ей норму, согласованную с частотой платежей.

В данной теме под *капитализацией* будем понимать процесс определения настоящей стоимости вечной ренты. Соответственно, *капитализировать доход (или расход)* при данной норме процента – значит найти настоящую стоимость вечной ренты, которая будет обеспечивать необходимые платежи. *Капитализи-*

рованная стоимость активов определяется как сумма первоначальной стоимости и настоящей стоимости неограниченного числа возобновлений. *Настоящая стоимость неограниченного числа возобновлений* есть текущая стоимость вечной ренты, которая будет обеспечивать необходимые возобновляемые платежи. Если C – первоначальная стоимость и K – капитализированная стоимость активов, то

$$K = C + A, \tag{3.6}$$

где A находится по формуле (3.1). Если рента простая, то R рассматривается как возобновляемая стоимость, и тогда имеем:

$$K = C + R/i. \tag{3.7}$$

Если же рента является общей, то W принимается в качестве возобновляемой стоимости, и R, используемое в (3.7), вычисляется по формуле (3.2).

Периодическая инвестиционная стоимость активов определяется как периодический процент на капитализированную стоимость активов. Обозначим ее H. Тогда

$$H = K \cdot i = C \cdot i + R. \tag{3.8}$$

На практике часто возникают задачи сравнения стоимостей различных активов. Это, например, проблемы, связанные с выбором взаимозаменяемого оборудования, обеспечивающего наибольшую эффективность при длительном использовании; вопросы определения сроков замены старого оборудования новым, а также целесообразности такой замены по сравнению с возможным ремонтом старого оборудования. Все машины постепенно теряют свою стоимость в связи с износом, и темп этих потерь различен. Поэтому сравнение по первоначальной стоимости не является адекватным. Но поскольку деньги, истраченные на машину, являются инвестицией, мы можем сравнить различные технические устройства, выполняющие одну и ту же работу, путем сопоставления их капитализированной или периодической инвестиционной стоимостей. При сравнении стоимостей надо учитывать также стоимость управления и эксплуатации.

В случае обращения с большим числом инвесторов печатается большое число контрактов (ценных бумаг).

Контракт (ценная бумага) называется *облигацией*, если в нем указана сумма займа, дата его возмещения, норма процента, по которой будет возмещаться заем, и даты, когда эти процентные платежи будут производиться. В контракте также устанавливается, где платежи могут быть собраны и какие гарантии предлагает корпорация, чтобы заем был возмещен.

Используется следующая терминология.

Лицевая (*номинальная*) *стоимость* – сумма денег, указанная в облигации.

Дата выкупа – дата возмещения займа.

Цена выкупа – сумма возмещения займа на дату выкупа. Цена выкупа близка к лицевой стоимости. Если она равна лицевой стоимости, то облигация называется *выкупаемой по номинальной стоимости*.

Отзываемая облигация – облигация, в которой содержится условие, позволяющее выпустившей корпорации выкупать облигации раньше даты выкупа.

Премия – назначенная надбавка к лицевой стоимости при отзыве раньше срока.

При продаже облигации по цене, отличной от лицевой, покупатель инвестирует свои деньги при фактической норме процента, отличающейся от указанной в облигации. Поэтому существует две нормы процента, связанные с облигациями:

а) *норма облигации* – то есть норма, по которой выплачиваются проценты на лицевую стоимость облигации;

б) *норма инвестиции* (*норма доходности*) – то есть норма процента, фактически реализованная покупателем.

Первая задача, касающаяся облигаций, – определение суммы, которую следует заплатить инвестору за облигацию, чтобы его инвестиция обеспечивала проценты с заданной инвестиционной нормой.

Пусть F – лицевая (номинальная) стоимость облигации;

C – цена выкупа облигации;

n – число периодов начисления процентов до даты выкупа;

r – норма облигации (норма процента на период, с которой выплачиваются проценты на лицевую стоимость);

R – сумма процентов, выплачиваемая за облигацию в дни выплаты процентов, $R = F \cdot r$

i – инвестиционная норма (или норма доходности);

P – покупная цена, при которой облигация будет давать i.

В случае, когда норма процента облигации r и инвестиционная норма i имеют одинаковый интервал начисления процентов, покупная цена вычисляется по формуле

$$P = R a_{\overline{n}|i} + C(1+i)^{-n}. \qquad (3.9)$$

Формула (3.6) может быть преобразована к виду

$$P = C + (R - Ci)a_{\overline{n}|i}. \qquad (3.10)$$

Если $R = C \cdot i$, то из (3.10) следует, что $P = C$, то есть покупная цена P совпадает с выкупной ценой C. Если $R > C \cdot i$, то $P > C$. Если же $R < C \cdot i$, то $P < C$.

Если период начисления процентов отличается от периода выплаты, то процентные платежи облигации образуют общий аннуитет. Тогда он преобразуется в эквивалентный обыкновенный простой аннуитет, и применение формул (3.9), (3.10) позволяет определить покупную цену облигации.

Пусть облигация покупается между датами начисления процентов по ней с целью получения инвестором процентов с нормой *i*. Пусть P_0 – покупная цена облигации на прошлую дату начисления процентов, обеспечивающая норму *i*. Пусть *f* – дробная часть периода начисления процентов, которая истекла с момента предшествующей даты начисления, и *P* – стоимость облигации на день продажи. Тогда *P* и P_0 – стоимости одного и того же контракта на различные даты и потому эквивалентны.

Уравнение эквивалентности дает формулу

$$P = P_0(1+i)^f \tag{3.11}$$

точной покупной стоимости облигации на дату продажи. Здесь $f = \dfrac{t}{T}$, где *t* – количество дней, прошедших с даты предыдущего платежа, *T* – количество дней в периоде.

Для аппроксимации точного результата может применяться приближенная формула

$$P = P_0(1+i \cdot f), \tag{3.12}$$

основанная на использовании простого процента вместо сложного.

На практике обычно используют формулу (3.12). При этом временной множитель *f* обычно также находят приближенно, считая, что год состоит из 12 месяцев по 30 дней каждый.

Расписание облигаций. Если облигация покупается за сумму *P*, большую выкупной цены *C*, то разность $P - C$ называется *превышением* (то есть превышением покупной цены над ценой выкупа). До тех пор, пока процентные платежи используются для амортизации превышения, происходит потеря капитала на дату выкупа. Вся информация может быть представлена в виде таблицы, которая называется *расписанием облигации*. Ее составление основано на том, что облигация была куплена для получения инвестиционного дохода с данной нормой процента на инвестированные деньги. Подробно эта процедура будет рассмотрена на примерах.

Если облигация покупается за сумму *P*, меньшую выкупной цены *C*, то разность $C - P$ называется *дефицитом.* На практике требуется, чтобы увеличение стоимости накапливалось постепенно, так что и в этом случае составляется расписание облигаций.

Определение нормы доходности. При покупке облигаций инвестор заинтересован в выборе, обеспечивающем наибольшую выгоду. То есть следует заранее определить инвестиционную норму, которую облигация будет обеспечивать, когда будет куплена за данную цену. Решение этой задачи не выражается в явной аналитической форме, однако имеются численные методы, которые различаются по степени точности и сложности. Одним из них является *метод средних.* Когда сумма денег инвестируется только на один период, норма процента может быть найдена делением полученных процентов на инвестированную сумму. Когда рассматривается более, чем один период и изменяются как процентные платежи, так и основная сумма, приближенное значение нормы может быть получено как отношение среднего процентного платежа к средней основной сумме.

3.2 Практикум (решение задач)

3.2.1. Сколько денег потребуется для того, чтобы установить постоянную премию за техническую разработку по 15 *млн руб*. в конце каждого года, если деньги инвестируются при норме 6 % эффективных?

3.2.2. Для оплаты обслуживания химчистки требуется 150 *млн руб*. в конце каждого квартала. Какую сумму следует инвестировать финансовому отделу управления бытового обслуживания, чтобы на получаемые проценты обслуживать химчистку, если деньги стоят $j_1 = 8\,\%$?

3.2.3. Промышленная компания заплатила первоначально за фрезы 40 млн руб., после чего в конце каждого месяца она платит по 10 *млн руб*. за возобновление фрез из-за их износа и поломок. Если деньги стоят 8 % эффективных, то найдите капитализированную стоимость фрез.

3.2.4. Машина, стоящая 200 *млн руб*., будет использована в течение 40 лет, после чего может быть продана на металлолом за 10 *млн руб*. Какую сумму могла бы заплатить компания за другую машину для тех же целей, которая после использования в течение 25 лет при замене не давала бы никаких денег при утилизации? При этом установлена норма $i_{эфф.} = 4\,\%$.

3.2.5. Облигация на 20 *млн руб*., по которой выплачивается процент с нормой $j_4 = 12$, будет выкупаться за 21 *млн руб*. через 10 лет. За сколько следует ее продавать, чтобы инвестору гарантировалась норма $j_4^* = 8\,\%$?

3.2.6. Облигация на 10 *млн руб*., по которой выплачивается 6 % каждые полгода, может быть отозвана за 110 % ее лицевой стоимости 1 марта 2025 года. Если она в этот день не отозвана, то ее выкупают по номинальной стоимости 1 марта 2035 г. Найдите покупную цену на 1 марта 2000 года, которая гарантировала бы проценты с нормой 7 %, $m = 2$. Решите задачу, используя формулу (3.9).

3.2.7. Облигация на 10 *млн руб*., по которой выплачивается процент с нормой 5 %, $m = 2$, будет выкупаться за 10.5 *млн руб*. через 15 лет. Найдите покупную цену, эквивалентную инвестиции денег с нормой 4 %, $m = 1$.

3.2.8. Найдите покупную цену на 16 июня 1990 года для облигации с лицевой стоимостью 10 млн руб., по которой выплачивается 7 % годовых с выплатами каждые полгода, если облигация выкупается по номинальной стоимости 1 октября 2015 года и предусматриваются проценты инвестору с нормой 6 %, $m = 2$.

3.2.9. Облигация покупается с лицевой стоимостью 10 *млн руб*., за которую выплачиваются проценты с нормой $j_2 = 5\,\%$. Она выкупается за три года до погашения за 10.5 *млн руб*. с целью получения дохода с нормой $j_2^* = 4\,\%$.

Покажите, что облигация покупается с превышением, найдите его, составьте расписание этой облигации.

3.3 Задания для контроля знаний

Для проверки усвоения пройденной темы предлагается решить следующие задачи.

3.3.1. Сколько денег потребуется для того, чтобы установить постоянную премию за научную работу по 10 *млн руб*. в конце каждого года, если деньги инвестируются при норме 8 % эффективных?

3.3.2. Для оплаты обслуживания железнодорожного переезда требуется 10 *млн руб*. в конце каждого месяца. Какую сумму следует инвестировать железнодорожной компании, чтобы на получаемые проценты поддерживать обслуживание переезда при установленной норме $i_{эфф.} = 3\,\%$?

3.3.3. Найдите капитализированную стоимость агрегата, который стоит 50 *млн руб*. и подлежит замене по той же стоимости в конце каждого десятилетнего периода, если установлена норма $i_{эфф.} = 4\,\%$.

3.3.4. Облигация на 10 *млн руб*., по которой выплачивается процент с нормой $j_2 = 5\,\%$, будет выкупаться за 10,5 *млн руб*. через 15 лет. За сколько следует ее продавать, чтобы инвестору гарантировалась норма $j_2^* = 4\,\%$?

3.3.5. Решите задачу 8.2.2, используя формулу (8.2).

3.3.6. Облигация на 10 *млн руб*., по которой выплачивается процент с нормой 5 %, $m = 2$, будет выкупаться за 10,5 *млн руб*. через 15 лет. Найдите покупную цену, эквивалентную инвестиции денег с нормой 4 %, $m = 4$.

3.3.7. Инвестор покупает облигацию с лицевой стоимостью 10 *млн руб*., за которую выплачиваются проценты с нормой $j_2 = 5\,\%$. Она выкупается за три года до погашения за 10,5 *млн руб*. с целью получения дохода с нормой $j_2^* = 6\,\%$. Покажите, что облигация покупается с дефицитом, найдите его, составьте расписание этой облигации.

Практическое занятие 3 (часть 2)
ОБЕСЦЕНИВАНИЕ. АКЦИИ

Основные понятия: понятие обесценивания. Основные методы установления сумм обесценивания: линейный метод, метод погасительного фонда. Годовая величина обесценивания и процентов. Акционерный сертификат (акция). Типы акций. Торговля акциями.

3.4 Теоретические сведения.

Одной из издержек функционирования предприятия являются потери в стоимости физической собственности, вызванные различными причинами.

Обесценивание – это потери в стоимости собственности, не восстанавливаемые текущей поддержкой, которые обусловлены всеми факторами, вызывающими окончательный износ собственности. Эти факторы охватывают износ, разрушение, непригодность и устаревание. *Годовое обесценивание* – это потери, которые имеют место в течение года.

Сумма, равная обесцениванию, берется из валового дохода и инвестируется таким образом, чтобы первоначальный капитал оставался нетронутым.

Для расчета величины обесценивания в каждом году используются различные способы. При этом *полное обесценивание плюс книжная цена активов должны быть всегда равны первоначальной стоимости активов*.

При использовании *линейного метода* (*метода средних*) предполагается, что *сумма обесценивания для каждого года одинакова* (постоянна). Если C – первоначальная стоимость, n – время использования в годах, S – стоимость остатков, или коммерческая стоимость, в конце периода использования, то годовое обесценивание принимается равным:

$$R = (C - S) / n. \tag{3.13}$$

Метод погасительного фонда является модификацией линейного метода при *учете накопления процентов фонда обесценивания*. Устанавливается погасительный фонд для накопления суммы денег, равной полному обесцениванию $\boldsymbol{C - S}$**.** Если норма погасительного фонда равна $\boldsymbol{i}$ *%* в год и $\boldsymbol{R}$ – ежегодный платеж в фонд, то

$$R s_{\overline{n}|i} = C - S, \quad \text{откуда } R = (C - S) / s_{\overline{n}|i}. \tag{3.14}$$

При таком плане ежегодное обесценивание изменяется, так как оно равно платежу, сделанному в конце года плюс процент, накопленный фондом в течение этого года. Книжная цена активов определяется как разность между C и полной суммой фонда обесценивания.

В каждом из методов составляется *расписание обесценивания*.

Под *годовой величиной обесценивания и процентов* понимается стоимость, охватывающая стоимость обесценивания и процентную стоимость книжной цены. Годовая процентная стоимость вычисляется на книжную цену за текущий год, то есть на книжную цену по истечении прошлого года. В реальной практике для расчетов используется метод погасительного фонда. При этом норма процентов, с которой накапливается погасительный фонд, не обязательно совпадает с нормой процентов на книжную цену активов.

Для расчета годовой величины обесценивания и процентов используются следующие формулы. Увеличение обесценивания в методе погасительного фонда в конце k-го года рассчитывается как $R = (1+i)^{k-1}$, книжная цена активов в конце (k-1)-го года – $C - R s_{\overline{k-1}|i}$. Тогда полная годовая величина обесценивания и процентов в конце k-го года равна:

$$Y = R(1+i)^{k-1} + (C - R s_{\overline{k-1}|i}) i', \tag{3.15}$$

где i' – годовая норма процента на книжную цену.

Упражнение. Докажите, что при $i = i'$ выражение (3.15) приводится к виду:

$$Y = R + C \cdot i. \tag{3.16}$$

Акцией (акционерным сертификатом) называется документ, удостоверяющий участие во владении капиталом корпорации. Владелец акций называется *акционером*, а сам капитал – *акционерным капиталом*.

Акция свидетельствует о внесении доли в капитал *акционерного общества* и дает право на получение части прибыли в форме *дивидендов*. По степени риска различают два типа акций. *Привилегированные* акции имеют *установленный доход*, который начисляется на сертификат *в первую очередь* в виде твердого, *заранее определенного процента.* Владельцы *обыкновенных (простых) акций* принимают на себя риски собственности, в случае неудач они могут потерять весь свой инвестированный капитал или его часть. С другой стороны, их *доходы ничем не ограничиваются.* Они могут получать как увеличивающиеся дивиденды, так и увеличивающуюся рыночную цену за свои акции.

Номинальной стоимостью акции называется денежная сумма, обозначенная на документе (на сертификате). *Курсом акции* называется цена, по которой акция продается на рынке.

Курс акции (*КА*) находится в прямой зависимости от получаемого по ней дивиденда (*D*) (и в особенности от его перспектив) и в обратной зависимости от величины процентных ставок (*i*) в данный момент, а также от других факторов. Формально:

$$KA = \frac{D}{i}. \tag{3.17}$$

Привилегированные акции являются ценными бумагами с фиксированным доходом *без дат погашения*. Таким образом, дивиденды образуют бессрочный аннуитет, и цена привилегированных акций P равна

$$P = \frac{F}{i}. \tag{3.18}$$

где F – настоящая стоимость будущих дивидендов (или постоянных купонов), а величина i – банковский процент.

Дивиденды обыкновенных акций заранее неизвестны и не постоянны. Настоящую стоимость будущих дивидендов можно устанавливать только теоретически. Пусть прогнозируется, что они будут увеличиваться в геометрической прогрессии со знаменателем $1+k$, где $k \in (1;i)$, и акция приобретается для того, чтобы давать доходность i за период. Тогда теоретическая настоящая стоимость этого аннуитета в предположении, что $D = 1$, а дисконтирующий множитель $\nu = (1+i)^{-1}$, равна:

$$P_1 = \lim_{n\to\infty}(\nu + \nu^2(1+k) + \ldots + \nu^n(1+k)^{n-1}) = \frac{1}{i-k}, \tag{3.19}$$

а при размере дивиденда D получим

$$P = \frac{D}{i - k}. \qquad (3.20)$$

3.5 Практикум (решение задач)

3.5.1. Машина куплена компанией за 33 *млн руб*. Оценено, что полезно использовать ее в течение 5 лет, а остаточная стоимость составит 3 *млн руб*. Найдите годовое обесценивание при помощи линейного метода и постройте расписание, показывающее годовое обесценивание для каждого года, книжную цену машины (или оценку стоимости) и полное обесценивание.

3.5.2. Оборудование стоимостью 120 *млн руб*. изнашивается за 4 года до стоимости 20 *млн руб*. Составьте расписание обесценивания оборудования методом погасительного фонда при стоимости денег 4 % эффективных.

3.5.3. Используя условия задачи 3.5.1, найдите годовую величину обесценивания и процентов, если для компенсации обесценивания используется накопительный фонд с нормой 4 %, а проценты на книжную цену начисляются при норме 6 %.

3.5.4. Обыкновенная акция постоянно зарабатывает 8 *млн руб*., и по ней будет выплачиваться 2 *млн руб*. дивидендов в конце текущего года. Предполагается, что доход корпорации ориентировочно увеличивается на 4 % в год, и она планирует выплачивать 25 % дохода в виде дивидендов. Найдите настоящую теоретическую стоимость акции при годовой эффективной ставке доходности *а*) 8 %; *б*) 5 %.

3.6 Задания для контроля знаний

Для проверки усвоения пройденной темы предлагается решить следующие задачи.

3.6.1. Станок стоит 100 *млн руб*. и может быть сдан на металлолом через 5 лет на сумму 20 *млн руб*. Составьте расписание обесценивания станка линейным методом.

3.6.2. Машина куплена компанией за 33 *млн руб*. Оценено, что полезно использовать ее в течение 5 лет, а остаточная стоимость составит 3 *млн руб*. Используя метод погасительного фонда, найдите ежегодные взносы в фонд обесценивания и составьте расписание обесценивания для этой машины, если фонд накапливает с нормой $j_1 = 4\,\%$.

3.6.3. Обыкновенная акция постоянно зарабатывает 4 *млн руб*., и по ней будет выплачиваться 2 *млн руб*. дивидендов в конце текущего года. Предполагается, что доход корпорации ориентировочно увеличивается на 5 % в год, и она планирует выплачивать 50 % дохода в виде дивидендов. Найдите теоретическую цену заработка инвестора при годовой эффективной ставке доходности *а*) 10 %; *б*) 8 %; *в*) 6 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабеня, И. Г. Финансовый менеджмент / И. Г. Бабеня. – Витебск : УО «ВГТУ», 2006.
2. Балабанов, Н. Т. Основы финансового менеджмента / Н. Т. Балабанов. – Москва : Финансы и статистика, 1995.
3. Кочович, Е. Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов / Е. Кочанович. – Москва : Финансы и статистика, 1994.
4. Баканов, М. И. Теория экономического анализа / М. И. Баканов. – Москва : Финансы и статистика, 1995.
5. Бланк, И. А. Финансовый менеджмент : учебный курс / И. А. Бланк. – Киев : Ника-Центр Эльга, 2004.
6. Ткачук, М. И. Основы финансового менеджмента / М. И. Ткачук, Е. Ф. Киреева. – Минск : Интерсервис, Экоперспектива, 2002.
7. Аванесов, Э. Т. Инвестиционный анализ / Э. Т. Аванесов, М. М. Ковалев, В. Г. Руденко. – Минск : БГУ, 2002.
8. Малюгин, В. И. Рынок ценных бумаг: количественные методы анализа / В. И. Малюгин. – Минск : БГУ, 2001.
9. Бригхем, Ю Финансовый менеджмент : полный курс ; пер. с англ. ; под ред. В. В. Ковалева. – С.–Петербург, 2005.
10. Гуринович, С. Л. Математика. Задачи с экономическим содержанием / С. Л. Гуринович. – Минск : Новое знание, 2008.
11. Гусак, А. А. Высшая математика. В 2 т. Т. 2 / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2004.

12 Кирлица, В. П. Финансовая математика. Руководство к решению задач / В. П. Кирлица. – Минск : ТетраСистемс, 2005.

13. Финансовая математика. Математическое моделирование финансового рынка / под ред. В. А. Половникова. – ВЗФЭИ, 2004.
14. Стоянов, Е. С. Финансовый менеджмент: Теория и практика / Е. С. Стоянов. – Москва, 1996.
15. Медведев, Г. А. Начальный курс финансовой математики / Г. А. Медведев. – Москва : Остожье, 2000.
16. Четыркин, Е. М. Финансовая математика / Е. М. Четыркин. – Москва : Дело. Лтд, 2001.
17. Четыркин, Е. М. Методы финансовых и коммерческих расчетов / Е. М. Четыркин. – Москва : Дело. Лтд, 1995.
18. Ващенко, Т. П. Математика финансового менеджмента / Т. П. Ващенко. – Москва : Перспектива, 1996.
19. Павлова, Л. Н. Финансовый менеджмент. Управление денежным оборотом предприятия / Л. Н. Павлова. – Москва : Финансы и статистика, 2003.
20. Брейли, Б. Принципы корпоративных финансов: пер. с англ. / Б. Брейли. – Москва : Олимп-Бизнес, 2004.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.1 – Порядковые номера дней в году

День месяца	*январь*	*февраль*	*март*	*апрель*	*май*	*июнь*	*июль*	*август*	*сентябрь*	*октябрь*	*ноябрь*	*декабрь*
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	-	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	-	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	-	90	-	151	-	212	243	-	304	-	365

Таблица А.2 – Коэффициенты наращивания годовой ренты

$$s_{n|i}=((1+i)^n-1)/i$$

Число периодов	*Ставка процентов*											
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*12*	*15*	*20*
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2	2,01	2,02	2,03	2,04	2,05	2,06	2,07	2,08	2,09	2,10	2,12	2,15	2,20
3	3,03	3,06	3,09	3,12	3,15	3,18	3,21	3,25	3,28	3,31	3,37	3,47	3,64
4	4,06	4,12	4,18	4,25	4,31	4,37	4,44	4,51	4,57	4,64	4,78	4,99	5,37
5	5,10	5,20	5,31	5,42	5,53	5,64	5,75	5,87	5,98	6,11	6,35	6,74	7,44
6	6,15	6,31	6,47	6,63	6,80	6,98	7,15	7,34	7,52	7,72	8,12	8,75	9,93
7	7,21	7,43	7,66	7,90	8,14	8,39	8,65	8,92	9,20	9,49	10,09	11,07	12,92
8	8,29	8,58	8,89	9,21	9,55	9,90	10,26	10,64	11,03	11,44	12,30	13,73	16,50
9	9,37	9,75	10,16	10,58	11,03	11,49	11,98	12,49	13,02	13,58	14,78	16,79	20,80
10	10,46	10,95	11,46	12,01	12,58	13,18	13,82	14,49	15,19	15,94	17,55	20,30	25,96
11	11,57	12,17	12,81	13,49	14,21	14,97	15,78	16,65	17,56	18,53	20,65	24,35	32,15
12	12,68	13,41	14,19	15,03	15,92	16,87	17,89	18,98	20,14	21,38	24,13	29,00	39,58
13	13,81	14,68	15,62	16,63	17,71	18,88	20,14	21,50	22,95	24,52	28,03	34,35	48,50
14	14,95	15,97	17,09	18,29	19,60	21,02	22,55	24,21	26,02	27,97	32,39	40,50	59,20
15	16,10	17,29	18,60	20,02	21,58	23,28	25,13	27,15	29,36	31,77	37,28	47,58	72,04

Продолжение таблицы А.2

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*12*	*15*	*20*
16	17,26	18,64	20,16	21,82	23,66	25,67	27,89	30,32	33,00	35,95	42,75	55,72	87,44
17	18,43	20,01	21,76	23,70	25,84	28,21	30,84	33,75	36,97	40,54	48,88	65,08	105,93
18	19,61	21,41	23,41	25,65	28,13	30,91	34,00	37,45	41,30	45,60	55,75	75,84	128,12
19	20,81	22,84	25,12	27,67	30,54	33,76	37,38	41,45	46,02	51,16	63,44	88,21	154,74
20	22,02	24,30	26,87	29,78	33,07	36,79	41,00	45,76	51,16	57,27	72,05	102,44	186,69
21	23,24	25,78	28,68	31,97	35,72	39,99	44,87	50,42	56,76	64,00	81,70	118,81	225,03
22	24,47	27,30	30,54	34,25	38,51	43,39	49,01	55,46	62,87	71,40	92,50	137,63	271,03
23	25,72	28,84	32,45	36,62	41,43	47,00	53,44	60,89	69,53	79,54	104,60	159,28	326,24
24	26,97	30,42	34,43	39,08	44,50	50,82	58,18	66,76	76,79	88,50	118,16	184,17	392,48
25	28,24	32,03	36,46	41,65	47,73	54,86	63,25	73,11	84,70	98,35	133,33	212,79	471,98
26	29,53	33,67	38,55	44,31	51,11	59,16	68,68	79,95	93,32	109,18	150,33	245,71	567,38
27	30,82	35,34	40,71	47,08	54,67	63,71	74,48	87,35	102,72	121,10	169,37	283,57	681,85
28	32,13	37,05	42,93	49,97	58,40	68,53	80,70	95,34	112,97	134,21	190,70	327,10	819,22
29	33,45	38,79	45,22	52,97	62,32	73,64	87,35	103,97	124,14	148,63	214,58	377,17	984,07
30	34,78	40,57	47,58	56,08	66,44	79,06	94,46	113,28	136,31	164,49	241,33	434,75	1181,88
31	36,13	42,38	50,00	59,33	70,76	84,80	102,07	123,35	149,58	181,94	271,29	500,96	1419,26
32	37,49	44,23	52,50	62,70	75,30	90,89	110,22	134,21	164,04	201,14	304,85	577,10	1704,11
33	38,87	46,11	55,08	66,21	80,06	97,34	118,93	145,95	179,80	222,25	342,43	664,67	2045,93
34	40,26	48,03	57,73	69,86	85,07	104,18	128,26	158,63	196,98	245,48	384,52	765,37	2456,12
35	41,66	49,99	60,46	73,65	90,32	111,43	138,24	172,32	215,71	271,02	431,66	881,17	2948,34
36	43,08	51,99	63,28	77,60	95,84	119,12	148,91	187,10	236,12	299,13	484,46	1014,35	3539,01

Окончание таблицы А.2

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*12*	*15*	*20*
37	44,51	54,03	66,17	81,70	101,63	127,27	160,34	203,07	258,38	330,04	543,60	1167,50	4247,81
38	45,95	56,11	69,16	85,97	107,71	135,90	172,56	220,32	282,63	364,04	609,83	1343,62	5098,37
39	47,41	58,24	72,23	90,41	114,10	145,06	185,64	238,94	309,07	401,45	684,01	1546,17	6119,05
40	48,89	60,40	75,40	95,03	120,80	154,76	199,64	259,06	337,88	442,59	767,09	1779,09	7343,86
41	50,38	62,61	78,66	99,83	127,84	165,05	214,61	280,78	369,29	487,85	860,14	2046,95	8813,63
42	51,88	64,86	82,02	104,82	135,23	175,95	230,63	304,24	403,53	537,64	964,36	2355,00	10577,36
43	53,40	67,16	85,48	110,01	142,99	187,51	247,78	329,58	440,85	592,40	1081,08	2709,25	12693,83
44	54,93	69,50	89,05	115,41	151,14	199,76	266,12	356,95	481,52	652,64	1211,81	3116,63	15233,59
45	56,48	71,89	92,72	121,03	159,70	212,74	285,75	386,51	525,86	718,90	1358,23	3585,13	18281,31
46	58,05	74,33	96,50	126,87	168,69	226,51	306,75	418,43	574,19	791,80	1522,22	4123,90	21938,57
47	59,63	76,82	100,40	132,95	178,12	241,10	329,22	452,90	626,86	871,97	1705,88	4743,48	26327,29
48	61,22	79,35	104,41	139,26	188,03	256,56	353,27	490,13	684,28	960,17	1911,59	5456,00	31593,74
49	62,83	81,94	108,54	145,83	198,43	272,96	379,00	530,34	746,87	1057,19	2141,98	6275,41	37913,49
50	64,46	84,58	112,80	152,67	209,35	290,34	406,53	573,77	815,08	1163,91	2400,02	7217,72	45497,19
55	72,85	98,59	136,07	191,16	272,71	394,17	575,93	848,92	1260,09	1880,59	4236,01	14524,15	113219,01
60	81,67	114,05	163,05	237,99	353,58	533,13	813,52	1253,21	1944,79	3034,82	7471,64	29219,99	281732,57
65	90,94	131,13	194,33	294,97	456,80	719,08	1146,76	1847,25	2998,29	4893,71	13173,94	58778,58	701048,23
70	100,68	149,98	230,59	364,29	588,53	967,93	1614,13	2720,08	4619,22	7887,47	23223,33	118231,47	1744439,78
80	121,67	193,77	321,36	551,24	971,23	1746,60	3189,06	5886,94	10950,57	20474,00	72145,69	478332,53	10801137,31
90	144,86	247,16	443,35	827,98	1594,61	3141,08	6287,19	12723,94	25939,18	53120,23	224091,12	1935142,17	66877821,24
100	170,48	312,23	607,29	1237,62	2610,03	5638,37	12381,66	27484,52	61422,68	137796,12	696010,55	7828749,67	414089867,61

Таблица А.3 – Коэффициенты приведения годовой ренты

$$a_{n|i}=(1 - (1 + i)^{-n}) / i$$

Число периодов	*Ставка процентов*												
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*12*	*15*	*20*
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091	0,8929	0,8696	0,8333
2	1,9704	1,9416	1,9135	1,8861	1,8594	1,8334	1,8080	1,7833	1,7591	1,7355	1,6901	1,6257	1,5278
3	2,9410	2,8839	2,8286	2,7751	2,7232	2,6730	2,6243	2,5771	2,5313	2,4869	2,4018	2,2832	2,1065
4	3,9020	3,8077	3,7171	3,6299	3,5460	3,4651	3,3872	3,3121	3,2397	3,1699	3,0373	2,8550	2,5887
5	4,8534	4,7135	4,5797	4,4518	4,3295	4,2124	4,1002	3,9927	3,8897	3,7908	3,6048	3,3522	2,9906
6	5,7955	5,6014	5,4172	5,2421	5,0757	4,9173	4,7665	4,6229	4,4859	4,3553	4,1114	3,7845	3,3255
7	6,7282	6,4720	6,2303	6,0021	5,7864	5,5824	5,3893	5,2064	5,0330	4,8684	4,5638	4,1604	3,6046
8	7,6517	7,3255	7,0197	6,7327	6,4632	6,2098	5,9713	5,7466	5,5348	5,3349	4,9676	4,4873	3,8372
9	8,5660	8,1622	7,7861	7,4353	7,1078	6,8017	6,5152	6,2469	5,9952	5,7590	5,3282	4,7716	4,0310
10	9,4713	8,9826	8,5302	8,1109	7,7217	7,3601	7,0236	6,7101	6,4177	6,1446	5,6502	5,0188	4,1925
11	10,368	9,7868	9,2526	8,7605	8,3064	7,8869	7,4987	7,1390	6,8052	6,4951	5,9377	5,2337	4,3271
12	11,255	10,575	9,9540	9,3851	8,8633	8,3838	7,9427	7,5361	7,1607	6,8137	6,1944	5,4206	4,4392
13	12,134	11,348	10,635	9,9856	9,3936	8,8527	8,3577	7,9038	7,4869	7,1034	6,4235	5,5831	4,5327
14	13,004	12,106	11,296	10,5631	9,8986	9,2950	8,7455	8,2442	7,7862	7,3667	6,6282	5,7245	4,6106
15	13,865	12,849	11,938	11,1184	10,3797	9,7122	9,1079	8,5595	8,0607	7,6061	6,8109	5,8474	4,6755

Продолжение таблицы А.3

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*12*	*15*	*20*
16	14,718	13,578	12,561	11,6523	10,8378	10,1059	9,4466	8,8514	8,3126	7,8237	6,9740	5,9542	4,7296
17	15,562	14,292	13,166	12,1657	11,2741	10,4773	9,7632	9,1216	8,5436	8,0216	7,1196	6,0472	4,7746
18	16,398	14,992	13,754	12,6593	11,6896	10,8276	10,0591	9,3719	8,7556	8,2014	7,2497	6,1280	4,8122
19	17,226	15,678	14,324	13,1339	12,0853	11,1581	10,3356	9,6036	8,9501	8,3649	7,3658	6,1982	4,8435
20	18,046	16,351	14,877	13,5903	12,4622	11,4699	10,5940	9,8181	9,1285	8,5136	7,4694	6,2593	4,8696
21	18,857	17,011	15,415	14,0292	12,8212	11,7641	10,8355	10,0168	9,2922	8,6487	7,5620	6,3125	4,8913
22	19,660	17,658	15,937	14,4511	13,1630	12,0416	11,0612	10,2007	9,4424	8,7715	7,6446	6,3587	4,9094
23	20,456	18,292	16,444	14,8568	13,4886	12,3034	11,2722	10,3711	9,5802	8,8832	7,7184	6,3988	4,9245
24	21,243	18,914	16,936	15,2470	13,7986	12,5504	11,4693	10,5288	9,7066	8,9847	7,7843	6,4338	4,9371
25	22,023	19,523	17,413	15,6221	14,0939	12,7834	11,6536	10,6748	9,8226	9,0770	7,8431	6,4641	4,9476
26	22,795	20,121	17,877	15,9828	14,3752	13,0032	11,8258	10,8100	9,9290	9,1609	7,8957	6,4906	4,9563
27	23,560	20,707	18,327	16,3296	14,6430	13,2105	11,9867	10,9352	10,0266	9,2372	7,9426	6,5135	4,9636
28	24,316	21,281	18,764	16,6631	14,8981	13,4062	12,1371	11,0511	10,1161	9,3066	7,9844	6,5335	4,9697
29	25,066	21,844	19,188	16,9837	15,1411	13,5907	12,2777	11,1584	10,1983	9,3696	8,0218	6,5509	4,9747
30	25,808	22,396	19,600	17,2920	15,3725	13,7648	12,4090	11,2578	10,2737	9,4269	8,0552	6,5660	4,9789
31	26,542	22,938	20,000	17,5885	15,5928	13,9291	12,5318	11,3498	10,3428	9,4790	8,0850	6,5791	4,9824
32	27,270	23,468	20,389	17,8736	15,8027	14,0840	12,6466	11,4350	10,4062	9,5264	8,1116	6,5905	4,9854
33	27,990	23,989	20,766	18,1476	16,0025	14,2302	12,7538	11,5139	10,4644	9,5694	8,1354	6,6005	4,9878
34	28,703	24,499	21,132	18,4112	16,1929	14,3681	12,8540	11,5869	10,5178	9,6086	8,1566	6,6091	4,9898
35	29,409	24,999	21,487	18,6646	16,3742	14,4982	12,9477	11,6546	10,5668	9,6442	8,1755	6,6166	4,9915
36	30,108	25,489	21,832	18,9083	16,5469	14,6210	13,0352	11,7172	10,6118	9,6765	8,1924	6,6231	4,9929

Окончание таблицы А.3

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*12*	*15*	*20*
37	30,800	25,969	22,167	19,1426	16,7113	14,7368	13,11702	11,77518	10,65299	9,7059165	8,2075127	6,6288147	4,9941215
38	31,485	26,441	22,492	19,3679	16,8679	14,8460	13,19347	11,82887	10,69082	9,7326514	8,2209935	6,6337519	4,9951013
39	32,163	26,903	22,808	19,5845	17,0170	14,9491	13,26493	11,87858	10,72552	9,7569558	8,2330299	6,6380451	4,9959177
40	32,835	27,355	23,115	19,7928	17,1591	15,0463	13,33171	11,92461	10,75736	9,7790507	8,2437767	6,6417784	4,9965981
41	33,500	27,799	23,412	19,9931	17,2944	15,1380	13,39412	11,96723	10,78657	9,7991370	8,2533720	6,6450247	4,9971651
42	34,158	28,235	23,701	20,1856	17,4232	15,2245	13,45245	12,00670	10,81337	9,8173973	8,2619393	6,6478475	4,9976376
43	34,810	28,662	23,982	20,3708	17,5459	15,3062	13,50696	12,04324	10,83795	9,8339975	8,2695887	6,6503022	4,9980313
44	35,455	29,080	24,254	20,5488	17,6628	15,3832	13,55791	12,07707	10,86051	9,8490887	8,2764185	6,6524367	4,9983594
45	36,095	29,490	24,519	20,7200	17,7741	15,4558	13,60552	12,10840	10,88120	9,8628079	8,2825165	6,6542928	4,9986329
46	36,727	29,892	24,775	20,8847	17,8801	15,5244	13,65002	12,13741	10,90018	9,8752799	8,2879611	6,6559068	4,9988607
47	37,354	30,287	25,025	21,0429	17,9810	15,5890	13,69161	12,16427	10,91760	9,8866181	8,2928225	6,6573102	4,9990506
48	37,974	30,673	25,267	21,1951	18,0772	15,6500	13,73047	12,18914	10,93358	9,8969255	8,2971629	6,6585306	4,9992088
49	38,588	31,052	25,502	21,3415	18,1687	15,7076	13,76680	12,21216	10,94823	9,9062959	8,3010383	6,6595919	4,9993407
50	39,196	31,424	25,730	21,4822	18,2559	15,7619	13,80075	12,23348	10,96168	9,9148145	8,3044985	6,6605147	4,9994506
55	42,147	33,175	26,774	22,1086	18,6335	15,9905	13,93994	12,31861	11,01399	9,9471065	8,3169717	6,6636080	4,9997792
60	44,955	34,761	27,676	22,6235	18,9293	16,1614	14,03918	12,37655	11,04799	9,9671573	8,3240493	6,6651460	4,9999113
65	47,627	36,197	28,453	23,0467	19,1611	16,2891	14,10994	12,41598	11,07009	9,9796073	8,3280653	6,6659106	4,9999643
70	50,169	37,499	29,123	23,3945	19,3427	16,3845	14,16039	12,44282	11,08445	9,9873377	8,3303441	6,6662908	4,9999857
80	54,888	39,745	30,201	23,9154	19,5965	16,5091	14,22201	12,47351	11,09985	9,9951181	8,3323709	6,6665738	4,9999977
90	59,161	41,587	31,002	24,2673	19,7523	16,5787	14,25333	12,48773	11,10635	9,9981178	8,3330235	6,6666437	4,9999996
100	63,029	43,098	31,599	24,5050	19,8479	16,6175	14,26925	12,49432	11,10910	9,9992743	8,3332336	6,6666610	4,9999999

Учебное издание

Финансовая математика

Методические указания к практическим занятиям

Составители:

Завацкий Юрий Александрович
Денисов Владимир Семёнович
Дмитриев Александр Петрович
Коваленко Александр Вильямович

Редактор *Н. В. Медведева*
Корректор *Т. А. Осипова*
Компьютерная верстка *Ю. А. Завацкий*

Подписано к печати 25.06.2018. Формат 60x90 1/16. Усл. печ. листов 3,0.
Уч.-изд. листов 3,4. Тираж 60 экз. Заказ № 185.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.