МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ СМО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НОРМИРОВАНИЯ

Методические указания для самостоятельной работы студентов
экономических специальностей дневной формы обучения

Витебск
2018

УДК 004.4:33

Составители:

О. Г. Мандрик, Т. П. Стасеня

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ», протокол № 5 от 28.05.2018.

Эконометрика и экономико-математические методы и модели. Использование методов теории СМО для решения задач нормирования : методические указания для самостоятельной работы студентов экономических специальностей дневной формы обучения / сост. О. Г. Мандрик, Т. П. Стасеня. – Витебск : УО «ВГТУ», 2018. – 43 с.

Методические указания составлены в соответствии с типовой программой курса «Эконометрика и экономико-математические методы и модели». Данное издание содержит задания для самостоятельной работы студентов экономических специальностей дневной формы обучения. Подробно рассмотрены типовые примеры по каждому заданию. Приводится необходимый теоретический материал. Могут быть использованы всеми категориями студентов, магистрантов, аспирантов, преподавателей и сотрудников.

УДК 004.4:33

СОДЕРЖАНИЕ

1 ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ......... 4

2 ПРЕДМЕТ, МЕТОДЫ, ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ.. 6

3 КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ……… 11

4 ПОСТРОЕНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ……... 13

4.1 СМО с потерями (отказами)…………………………………………….. 14

4.2 СМО с ожиданием (очередью)…………………………………………... 16

4.3 СМО с несколькими параллельно работающими средствами обслуживания (каналами)………………………………………………………………… 19

4.4 Замкнутые СМО………….. 23

5 ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ………………….. 25

5.1 Расчет основных параметров одноканальной СМО (M/M/1)…………….... 25

5.2 Расчет основных параметров многоканальной СМО (M/M/S)……………. 31

6 ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ…………. 35

ЛИТЕРАТУРА………………………………………………………………… 42

1 ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория массового обслуживания, формально являясь частью теории случайных процессов, уже несколько десятилетий имеет самостоятельную область исследований со специфическим курсом задач. Зарождение и развитие теории массового обслуживания можно представить в виде следующей цепочки: *ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ → ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ → ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ*.

Теория вероятностей (как исторический родоначальник) теории массового обслуживания зародилась и начала оформляться в XVII в. благодаря необходимости изучения закономерностей случайных явлений. Исторически сложилось так, что схемами, дающими простые и прозрачные модели случайных явлений, а также возможность повторения одного и того же опыта в условиях массовости этих явлений, явились схемы азартных игр. Само слово «*азарт*» (от французского *le hazard*) означает «*случай*». До сих пор примеры из области азартных игр применяют при изучении теории вероятностей как упрощенные модели случайных явлений, наиболее просто и наглядно иллюстрирующие основные законы теории. В середине XVII в. математические исследования в области азартных игр проводили такие ученые, как Ферма (1601–1665 гг.), Паскаль (1623–1662 гг.) и др. Именно работам этих ученых современная математика обязана появлением таких категорий, как «*вероятность*» и «*математическое ожидание*». Однако вплоть до следующего столетия зародившаяся наука так и не подошла к классическим определениям теории.

Значительный шаг вперед в развитии теории вероятностей сделал Яков Бернулли (1654–1705 гг.). Он вывел и доказал закон больших чисел (простейшая форма закона больших чисел устанавливает связь между вероятностью события и частотой его появления, то есть при большом числе опытов относительная частота появления конкретного исхода стабилизируется и приближается к некоему числу – вероятности этого исхода). Позднее Пуассон (178–1840 гг.) доказал более общую, чем у Бернулли, форму больших чисел, а также впервые применил теорию вероятностей к задачам стрельбы (тем самым положив начало ее использования в военном деле). Пуассон также вывел один из законов распределения, который играет важную роль во всех приложениях теории вероятностей, в том числе в теории массового обслуживания.

В XIX в. при заметном угасании интереса к теории вероятностей в Западной Европе в России создается знаменитая Петербургская математическая школа, которая дала миру важнейшие труды по теории вероятностей и развитие нескольких ее приложений (в том числе теории случайных процессов), большинство из которых в настоящее время имеют самостоятельные области исследования. Основы современной теории случайных процессов (являющейся родоначальницей теории массового обслуживания) заложил А. А. Марков (1856–1922 гг.). Он существенно расширил области применения центральной предельной теоремы и закона больших чисел, распространив их как на зависимые, так и на не зависимые опыты.

Из теории случайных процессов, как уже говорилось ранее, постепенно выделилась теория массового обслуживания. Ее родоначальником считается датский ученый А. К. Эрланг.

Агнер Краруп Эрланг родился в Дании в 1878 г. В возрасте 14 лет он с отличием сдал предварительные экзамены в Копенгагенский университет. Из-за молодого возраста ему было отказано в обучении, поэтому следующие два года он работал в деревенской школе, после чего добился зачисления в университет. После успешного окончания университета А. Эрланг несколько лет преподавал в школах астрономию, химию, физику (его любимым предметом с детства была астрономия). В 1908 г. А. К. Эрланг стал научным сотрудником в лаборатории Копенгагенской Телефонной компании, а позднее возглавил ее. В телефонной компании Эрланг проработал двадцать лет (вплоть до смерти). Он не был женат, редко брал отпуск, все свое время посвящая работе. Его первая научная работа была издана в 1909 г. Наиболее известным научным трудом А. К. Эрланга считается «Решение некоторых проблем в теории вероятностей значений в автоматических телефонных станциях» – именно в нем была выведена формула Эрланга, которая широко используется в теории вероятностей и других областях прикладной математики.

В настоящее время мировая наука позиционирует А. К. Эрланга как математика и инженера, основателя таких научных направлений, как теория телетрафика, теория массового обслуживания. Термин «*эрланг*» во всем мире используется как стандартная единица телефонного движения. Именем Эрланга названы одно из распределений вероятностей в теории вероятностей и язык программирования Erlang для крупномасштабных промышленных систем онлайн, который создала одна из крупнейших компаний современности Ericsson.

А. К. Эрланг, решая практические задачи совершенствования работы систем связи, вывел ряд формулировок и формул, являющихся базовыми в теории массового обслуживания. Развили теорию массового обслуживания уже советские ученые.

В 30-е гг. XX в. А. Я. Хинчин разработал метод «вложенных цепей Маркова», давший возможность поиска распределения времени ожидания для простейших потоков на один канал, обслуживающий очередь с произвольным распределением времени обслуживания. В 50-е гг. XX в. Б. В. Гнеденко обобщил формулы Эрланга, а также рассмотрел случаи потери заявок при отказе канала обслуживания и переход заявки на другой свободный канал. Б. В. Гнеденко является автором первого в СССР спецкурса по теории массового обслуживания, а написанная им монография до сих пор является основополагающей при изучении теории массового обслуживания, как в России, так и за рубежом.

Много сделано в этой области советскими учеными А. И. Колмогоровым, Б. В. Гнеденко, И. П. Бусиенко и др.

В таблице 1 представлена краткая характеристика исторических этапов становления и развития теории массового обслуживания.

Таблица 1 – Характеристика исторических этапов становления и развития теории массового обслуживания

Этап	Ученые, внесшие вклад в развитие	Краткая характеристика этапа
Возникновение теории вероятностей (середина XVII в.)	Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс	Исследования в области азартных игр привели к появлению теории вероятностей. В этот период формулируются основные понятия теории: «вероятность», «математическое ожидание», пр.
Развитие и распространение теории вероятностей (XVIII–XIX вв.)	Я. Бернулли, К. Ф. Гаусс, С. Д. Пуассон	Доказан закон больших чисел. Введен и обоснован «нормальный закон» (закон Гаусса). Доказана центральная предельная теорема. В этот период впервые появляются приложения теории вероятностей
Появление теории случайных процессов (XX в.)	А. А. Марков	А. А. Марков (ученик П. Л. Чебышева) заложил основы теории «стохастических» случайных процессов
Появление и развитие теории массового обслуживания (XX в.)	А. К. Эрланг, А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко	А. К. Эрланг, решая практические задачи совершенствования работы систем связи, вывел ряд формулировок и формул, являющихся основополагающими в теории массового обслуживания. В 30-е гг. XX в. А. Я. Хинчин развивает метод «вложенных цепей Маркова», дающий возможность поиска распределения времени ожидания для простейших потоков на один канал, обслуживающий очередь с произвольным распределением времени обслуживания. В 50-е гг. XX в. Б. В. Гнеденко обобщает формулы Эрланга, рассматривая случаи потери заявок при отказе канала обслуживания и переход заявки на другой свободный канал

2 ПРЕДМЕТ, МЕТОДЫ, ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Предметом изучения теории массового обслуживания (*ТМО*) стали процессы обслуживания системами массового обслуживания (телефонные станции, локальные и глобальные вычислительные сети и т. п.) поступающих потоков сообщений и их количественные характеристики. Основы новой теории были заложены в трудах датского математика, сотрудника Копенгагенской телефонной компании А. К. Эрланга (принцип статистического равновесия) и получили дальнейшее развитие в работах многих отечественных и зарубежных ученых.

Первые задачи теории массового обслуживания были рассмотрены инженером А. К. Эрлангом (1878–1929 гг.). Появление этих задач связано со стремлением упорядочить работу телефонной сети и разработать методы, позволяющие заранее рассчитывать качество обслуживания потребителей в зависимости от числа используемых устройств. Обобщение методов и разработка общей теории массового обслуживания были начаты позже, в 50–60-х гг.

К числу показателей эффективности использования СМО относят такие как:

– абсолютная пропускная способность;

– относительная пропускная способность;

– коэффициент использования СМО.

Для многих СМО важно рассчитать следующие показатели качества обслуживания требований: среднее время ожидания заявки в очереди; среднее время пребывания заявки в СМО; вероятность отказа заявки; вероятность того, что будет обслуживание; среднее число заявок, находящихся в очереди, а также в СМО и др.

Схема СМО изображена на рисунке 1.

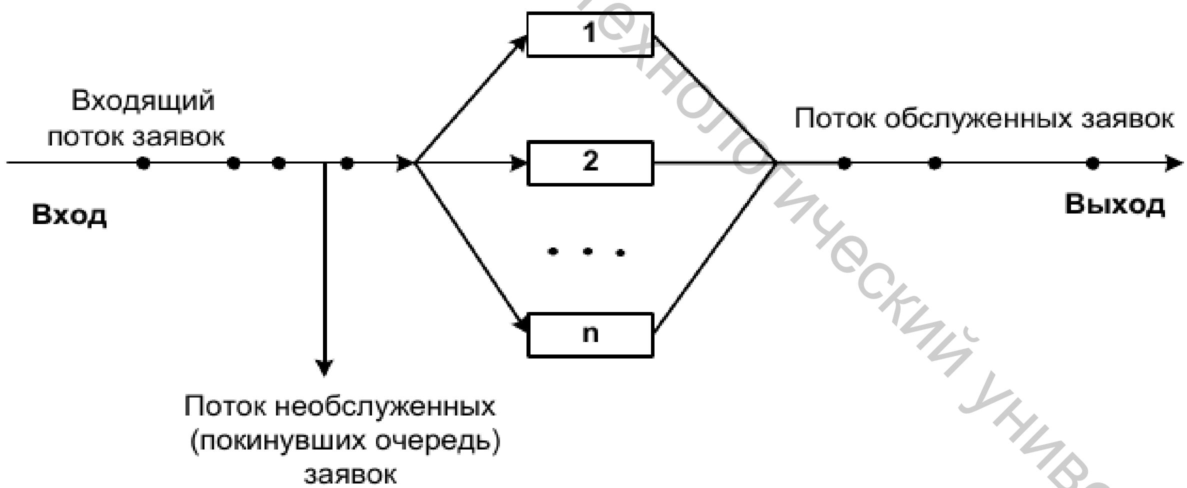

Рисунок 1 – Схема СМО

Математическая модель системы массового обслуживания (СМО) включает четыре основных элемента: поток поступающих сообщений, систему обслуживания, характеристики качества и дисциплину обслуживания.

Понятие ***потока сообщений*** включает информацию о модели потока вызовов (требований на соединение), законе распределения длительности обслуживания (передачи) сообщений, множестве адресов источников и приемников сообщений, а также типе занимаемого для передачи сообщений канала и способе передачи – аналоговом или дискретном.

Система обслуживания характеризуется структурой построения и набором структурных параметров.

Под ***дисциплиной обслуживания*** поступающих сообщений понимают: способ обслуживания (с явными потерями, ожиданием, повторением или комбинированный), порядок обслуживания (в порядке очередности, случайном порядке или с приоритетом), а также другую информацию, характеризующую взаимодействие потока сообщений с системой обслуживания.

К ***характеристикам качества обслуживания*** относятся: вероятность явной или условной потери сообщения, среднее время задержки сообщения, средняя длина очереди, вероятность потери поступившего вызова, интенсивность обслуженной нагрузки и др.

При исследовании СМО могут решаться следующие задачи:

1. ***Задача анализа СМО*** – определения характеристик качества обслуживания в зависимости от параметров и свойств входящего потока сообщений, параметров и структуры системы обслуживания и дисциплины обслуживания.

2. ***Задача параметрического синтеза*** – определения параметров системы обслуживания при ее заданной структуре в зависимости от параметров и свойств потока сообщений, дисциплины и качества обслуживания.

3. ***Задача синтеза структуры системы с оптимизацией ее параметров*** таким образом, что при заданных потоках, дисциплине и качестве обслуживания стоимость СМО была минимальной, либо были минимальными потери вызовов при заданных потоках, дисциплине и стоимости системы.

Математический аппарат теории массового обслуживания базируется на теории вероятностей, комбинаторике и математической статистике.

Теория массового обслуживания – это прикладная математическая дисциплина, возникновение которой было вызвано потребностью практики в анализе процессов, приводящих к скоплению, задержкам в обслуживании и очередям.

Предметом теории массового обслуживания являются вероятностные модели реальных процессов обслуживания, в которых в случайные (или не в случайные) моменты времени, с одной стороны, постоянно возникают запросы на выполнение каких-либо работ, а с другой стороны – происходит постоянное удовлетворение этих запросов. Та часть процесса, в которой возникают запросы, называется ***обслуживаемой системой***, а та, которая принимает запросы и удовлетворяет их, – ***обслуживающей системой***. Совокупность обслуживающей и обслуживаемой систем представляет собой систему массового обслуживания.

Системами массового обслуживания являются, например, комплекс погрузочно-разгрузочных работ в морском порту, совокупность станков-автоматов (наладка и регулирование, загрузка заготовками, выборочный контроль готовых деталей, смазка и т. д.), система скорой медицинской помощи, совокупность летящих самолетов или ракет противника и соответствующие зенитные или противоракетные установки и др.

Каждый отдельный запрос на выполнение какой-либо работы в теории массового обслуживания называют ***требованием на обслуживание*** (заявкой, клиентом, вызовом).

Технические средства или производственный персонал, выполняющий функции обслуживания, называют ***каналами обслуживания*** или ***обслуживающими аппаратами***.

Очередью называют любое скопление объектов (требований), ожидающих обслуживания.

Таким образом, ***систему массового обслуживания*** (СМО) можно определить как совокупность, в которой последовательно связаны между собой поток требований на обслуживание, очередь и каналы обслуживания.

Термин «***теория массового обслуживания***» ввел Л. Я. Хинчин. За рубежом часто используют и другой термин – «***теория очередей***» или «***теория ожидания***».

Максимальное число требований, которые могут обслуживаться одновременно, определяют ***пропускную способность системы***.

Входящий поток требований – это некоторая последовательность появления объектов (требований) обслуживания.

В теории СМО один из центральных вопросов их организации – выяснение тех закономерностей, которым подчиняются моменты поступления требований на обслуживание в систему.

Самым простым потоком, с точки зрения его внутренней структуры, является ***регулярный поток***, то есть поток, в котором требования следуют одно за другим, через строго определенные промежутки времени (например, конвейер поточной линии с регламентированным ритмом работы). Однако на практике интервалы между моментами поступления требований в систему – основная характеристика входящего потока – в преобладающем числе систем не являются равными. Эта величина непрерывно варьируется под воздействием множества причин случайного характера.

Стационарным потоком требований называется поток, в котором появление k_1, k_2, ..., k_n требований зависит только от этих чисел и от длин промежутков времени Δt, то есть вероятность появления в промежутке ровно k требований является функцией только Δt и k ($k=0$, 1, 2, ...). Другими словами, вероятностные характеристики поступления требований в стационарном потоке не изменяются во времени.

Среднее число требований λ, поступающих в единицу времени, называется ***интенсивностью*** (***параметром***, ***плотностью***) входящего потока. У стационарного потока параметр λ один и тот же на любом отрезке Δt и зависит только от периода наблюдений.

Если интервалы времени между поступлениями требований являются независимыми величинами, то есть число требований, поступивших в систему на одном из интервалов, не зависит от числа требований, поступающих на другом, то говорят, что входящий поток требований характеризуется ***отсутствием последействия***. Потоки, обладающие этим свойством, можно отнести к Марковским случайным процессам, для которых характерна независимость будущего развития процесса от прошлого (число требований, поступивших в систему после некоторого момента времени, не зависит от того, сколько их поступило до этого момента).

Поток требований называется ***ординарным***, если вероятность $P_{>1}(\Delta t)$ того, что за малый промежуток времени Δt поступит два или более требования, пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью $P_1(\Delta t)$ того, что за этот промежуток времени поступит ровно одно требование, то есть $P_1(\Delta t) >> P_{>1}(\Delta t)$.

Условие ординарности означает практическую невозможность за короткий промежуток времени появления более чем одного требования.

Примером ординарных потоков является поступление требований от остановившихся из-за обрыва нити ткацких станков, неординарных – поток пассажиров, прибывающих в лифтах на данный этаж.

А. Я. Хинчин предложил потоки, обладающие свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называть ***простейшими***.

Входящий поток требований обычно описывается с помощью некоторого закона распределения, показывающего вероятность той или иной продолжительности интервала между моментами поступления требований.

Выходящий поток требований – это последовательность требований, покидающих обслуживающую систему.

Временем (***длительностью***) ***обслуживания называется*** период, в течение которого удовлетворяется требование на обслуживание, то есть период от начала обслуживания и до его завершения.

Период от момента поступления требования в систему и до начала обслуживания ***называется временем ожидания обслуживания***.

Время ожидания обслуживания в совокупности со временем обслуживания ***называется*** (***составляет***) ***временем пребывания требования в системе***.

Целью теории массового обслуживания является анализ процесса образования очередей, установление зависимости между характером входящего потока, производительностью отдельного канала, числом каналов и эффективностью обслуживания (пропускной способностью системы массового обслуживания).

Рассчитав характеристики СМО, имеется возможность оценить качество и эффективность ее функционирования, и выявить пути их улучшения.

Система массового обслуживания считается заданной, если определены элементы, которые существенно влияют на результат функционирования системы и тем самым на основные ее параметры.

Так как каждый из этих элементов может быть задан самым различным образом, то на практике существует большое количество разнообразных систем массового обслуживания.

Все задачи теории массового обслуживания носят оптимизационный характер и в конечном итоге направлены на определение такого варианта работы системы, при котором будет обеспечен минимум суммарных затрат от простоев каналов обслуживания, потерь времени и ресурсов на обслуживание и пр.

Методология теории массового обслуживания включает все основные элементы теории случайных процессов: Марковские случайные процессы, потоки заявок, граф состояний, системы обыкновенных дифференциальных уравнений для вероятностей состояний и др.

3 КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

СМО разделены на ряд типов по ряду признаков.

1. По ***числу каналов обслуживания*** СМО делятся на:

– *одноканальные*;

– *многоканальные*.

2. По ***характеру поведения заявки в системе*** (***удовлетворение требования***, ***поступившего на вход СМО***) все СМО бывают:

– *системы с отказами* (*потерями*);

– *системы с ожиданием* (*очередью*).

В СМО с отказами требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ, покидают систему не обслуженными и теряются.

Среди систем с ожиданием различают в свою очередь *чистые* и *смешанные* (*с ограничением*). СМО с ожиданием называется ***чистой***, когда требование, застав все обслуживающие каналы занятыми, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из обслуживающих каналов. В данном случае время пребывания в очереди или системе, а также длина очереди не ограничивается.

Виды смешанных СМО могут быть:

– системы с ограниченной длиной очереди (то есть допускающие очередь, но с ограниченным числом требований в ней);

– системы с ограниченным временем ожидания (то есть допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней);

– системы с ограничением на общее время пребывания требований в них;

– системы с ограничением на длину очереди и время пребывания в очереди (здесь требование покидает систему, если оно застало все каналы занятыми и очередь максимально допустимой длины, а также если оно постояло в очереди в среднем дольше некоторой величины);

– система с ограничением на длину очереди и время пребывания требований в системе.

3. По ***организации потока требований*** СМО бывают:

– *разомкнутые* (источник требования находится вне системы). По-другому их называют ***с неограниченным входящим потоком*** или ***с неограниченным числом источников требований***;

– *замкнутые* (источник находится в системе). Их еще называют ***системами с ограниченным потоком требований*** или ***с ограниченным числом источников требований***.

4. Один из важных признаков классификации – ***дисциплина обслуживания***, то есть правило отбора требований, поступающих в каналы обслуживания. Дисциплина очереди может сложиться стихийно или в результате длительной прокатки, вытекать из обычаев и традиций, может быть установлена исходя из каких-либо экономических, технологических, организационных или иных соображений.

Самым распространенным правилом отбора требований является:

1) первым пришел и первым обслужили;

2) последним пришел и первым обслужили;

3) первым пришел и последним обслужили;

4) последним пришел и последним обслужили

5) По ***наличию приоритета*** СМО делятся на:

– *системы без приоритета*;

– *системы с приоритетами*.

Системы массового обслуживания ***без приоритета*** могут быть:

– *с упорядоченным обслуживанием*. Наиболее распространенным является выбор требований в порядке их поступления в очередь;

– *с не упорядоченным обслуживанием* (в такой системе действует случайный выбор требований на обслуживание).

СМО ***с приоритетом*** бывают:

– *с абсолютным приоритетом*;

– *с относительным приоритетом*.

Если СМО охватывает несколько категорий требований и по каким-либо соображениям, необходимо соблюдать различный подход к отбору требований при поступлении их в канал обслуживания, то такие системы называются ***системами с приоритетом***, в противном случае – ***без приоритета***.

Система, в которой начавшееся обслуживание не может быть прервано до его окончания, называется ***системой с относительным приоритетом*** или ***системой с приоритетом без прерывания обслуживания***. В противном случае говорят о ***системах с абсолютным приоритетом*** или ***с приоритетом***, ***прерывающим обслуживание***.

6. По ***количеству фаз обслуживания*** СМО бывают:

– *однофазные*;

– *многофазные*.

СМО, в которых весь процесс обслуживания отдельного требования выполняется одним обслуживающим аппаратом, называются ***однофазными***.

В случае если требование, обслуженное одним прибором, поступает для дальнейшего обслуживания на вход другого аппарата, то СМО называются ***многофазными***.

В настоящее время для удобства обозначения типа СМО и соответствующего математического описания широко распространен код, ***содержащий 4 элемента***:

$$\boldsymbol{A} \,/\, \boldsymbol{B} \,/\, \boldsymbol{S} \,/\, \boldsymbol{N},$$

где A – указатель вида (типа) распределения входящего потока требований; B – вид (тип) распределения времени обслуживания (выходящего потока); S – число (количество) каналов обслуживания; N – объем источника поступления требования.

M / M / 1 – одноканальная система массового обслуживания (входящий поток Пуассоновский).

M / M / S – многоканальная система массового обслуживания (входящий поток Пуассоновский).

4 ПОСТРОЕНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Математически доказано, что простейший поток требований с известным параметром λ описывается законом Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\lambda \times t)^k}{k!} \times e^{-\lambda \times t}, \quad t > 0, \tag{4.1}$$

где $P_k(t)$ – вероятность того, что на произвольно выбранном участке времени продолжительностью t поступит ровно k требований.

Наибольшее распространение в теории принятия решений получил экспоненциальный закон распределения времени обслуживания. Функция распределения для этого закона

$$F(t) = 1 - e^{-\mu \times t}, \tag{4.2}$$

то есть вероятность того, что время обслуживания не превосходит некоторой величины t, определяется данной формулой.

При этом интенсивность обслуживания μ является величиной, обратной среднему времени обслуживания $\bar{t}_{об}$

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}}. \quad (4.3)$$

Типичная постановка задачи СМО обычно включает заданный входящий поток требований, известные дисциплину обслуживания и закон распределения времени обслуживания. При рассмотрении общих СМО предполагается, что система функционирует в течение достаточного интервала времени, по истечении которого в ее работе наступает стационарный режим. Теоретически установившийся режим наступает при $t \to \infty$, а вероятностные характеристики такой СМО уже не зависят от времени. Поэтому система значений вероятностей состояний, соответствующих стационарному режиму работы СМО, называется ***финальными вероятностями***.

4.1 СМО с потерями (отказами)

Пусть имеется *n*-канальная СМО с отказами. Она может находиться в следующих состояниях: E_0 – в системе находится нуль требований (то есть все каналы свободны), E_1 – в системе находится одно требование, E_k – в системе находится *k* требований, …, E_n – заняты все *n* каналов обслуживания.

Следовательно, если все *n* каналов заняты, то требование получает отказ, то есть покидает систему необслуженным. Если хотя бы один обслуживающий аппарат свободен, то требование направляется в свободный канал и обслуживается до конца.

Для СМО с отказами необходимо знание следующих параметров:

– число каналов (*n*);

– интенсивность входящего потока (λ), то есть на вход поступает пуассоновский поток требований;

– интенсивность потока обслуживания (μ), или производительность канала.

Для стационарных условий применяются следующие зависимости, характеризующие функционирование СМО с отказами:

– *среднее время обслуживания одной заявки одним каналом* ($\bar{t}_{об}$), где

$$\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu}; \quad (4.4)$$

– *интенсивности нагрузки системы* (ρ). Данный показатель обозначает приведенную плотность потока заявок

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \times \bar{t}_{об}; \quad (4.5)$$

– *предельные вероятности состояний системы* (*формула Эрланга*)

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1}, \tag{4.6}$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} \times P_0,\ 1 \le k \le n; \tag{4.7}$$

– *вероятность отказа*

$$P_{отк} = \frac{\rho^n}{n!} \times P_0. \tag{4.8}$$

Данный показатель для одноканальной СМО имеет вид

$$P_{отк} = \frac{\rho}{\rho + 1}; \tag{4.9}$$

– *относительная пропускная способность*

$$Q = 1 - P_{отк}; \tag{4.10}$$

– *абсолютная пропускная способность*

$$A = \lambda \times Q; \tag{4.11}$$

– *среднее число занятых каналов*

$$\overline{N}_З = \frac{A}{\mu} = \rho \times Q. \tag{4.12}$$

Дополнительно рассчитываются такие показатели, как:
– *коэффициент использования каналов* ($K_И$)

$$K_И = \frac{\overline{N}_З}{n}; \tag{4.13}$$

– *коэффициент простоя каналов* ($K_П$)

$$K_П = 1 - K_И; \quad (4.14)$$

– *среднее число простаивающих каналов* ($\overline{N}_П$)

$$\overline{N}_П = n - \overline{N}_З. \quad (4.15)$$

Для СМО с потерями необходимо рассчитать функцию потерь $(G_П)$ за определенный интервал времени (T) по формуле

$$G_П = \left(g_{ПК} \times \overline{N}_П + g_у \times P_{отк} \times \lambda\right) \times T, \quad (4.16)$$

где $g_{ПК}$ – стоимость единицы времени простоя обслуживающего канала; $g_у$ – величина потерь, связанных с уходом из системы одного требования; $\overline{N}_П$ – среднее число простаивающих каналов; $P_{отк}$ – вероятность отказа; λ – интенсивность входящего потока.

4.2 СМО с ожиданием (очередью)

Дана СМО с одним средством обслуживания, где ***длина очереди не ограничена***. Постановка задачи сводится к тому, что в канал обслуживания поступает простейший поток требований с постоянной интенсивностью λ. Если в момент поступления заявки средство обслуживания свободно, то начинается обслуживание. Если же канал занят, то вновь прибывшее требование становится в очередь за теми, которые поступили раньше и еще не начали обслуживаться. Длительность обслуживания представляет случайную величину, распределенную по экспоненциальному закону. Интенсивность обслуживания равна μ заявок в единицу времени.

Для одноканальной СМО с ожиданием условие, при котором очередь не возрастает бесконечно, имеет вид: $\rho < 1$, то $\lambda < \mu$. Если $\lambda \geq \mu$, то система обслуживания начнет функционировать в нестационарном режиме, когда длина очереди со временем неограниченно возрастает. Следовательно, в данном случае интенсивность поступления заявок должна быть строго меньше интенсивности обслуживания.

Приведем параметры при стационарном режиме функционирования одноканальной СМО с очередью (ее длина не ограничена):

– *предельные вероятности системы*

$$P_0 = 1 - \rho, \tag{4.17}$$

$$P_n = (1 - \rho) \times \rho^n, \;\; n = 1, 2, \ldots (\rho < 1); \tag{4.18}$$

– *среднее число требований, находящихся в системе* (*в очереди и на обслуживании*)

$$\overline{N}_C = \frac{\rho}{1 - \rho}; \tag{4.19}$$

– *среднее число требований, находящихся в очереди* (*длина очереди*)

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}, \tag{4.20}$$

или

$$\bar{r} = \overline{N}_C - \rho. \tag{4.21}$$

– *средняя продолжительность пребывания требования в очереди*

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho}{\mu \times (1 - \rho)}; \tag{4.22}$$

– *средняя продолжительность пребывания требования в системе*

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\overline{N}_C}{\lambda}, \tag{4.23}$$

или

$$\bar{t}_{сист} = \frac{1}{\mu \times (1 - \rho)}, \tag{4.24}$$

или

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об}. \tag{4.25}$$

Рассмотрим другую модификацию одноканальной СМО с ожиданием (очередью), где ***длина очереди ограничена***. Для подобной модели существует предположение, что вместимость системы ограничена, то есть СМО вмещает не более N клиентов. При этом обозначим через m максимальное число мест в очереди. Следовательно, максимальная вместимость системы равна $N = m + 1$. Ситуация в изучаемой модели такова, что как только число клиентов в СМО достигнет N, ни одно из дополнительных требований на обслуживание не принимается. Значение такого параметра, интенсивности нагрузки системы ρ, не обязательно должно быть меньше 1, так как поступления заявок в систему контролируется максимальной емкостью системы N.

К числу показателей функционирования одноканальной СМО с очередью (ее длина ограничена) относят также:

– *предельные вероятности системы*

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{N+1}, & \rho = 1 \end{cases}, \tag{4.26}$$

$$P_n = \rho^n \times P_0, \;\; n \leq N, \tag{4.27}$$

или

$$P_k = \rho^k \times P_0, \;\; k = 1,\ldots,m+1. \tag{4.28}$$

– *вероятность отказа*

$$P_{отк} = \rho^N \times P_0; \tag{4.29}$$

– *среднее число требований, находящихся в системе* (*в очереди и на обслуживании*)

$$\overline{N}_C = \begin{cases} \dfrac{\rho \times \left[1-(N+1)\times\rho^N + N\times\rho^{N+1}\right]}{(1-\rho)\times\left(1-\rho^{N+1}\right)}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{N}{2}, & \rho = 1 \end{cases}; \tag{4.30}$$

– *средняя продолжительность пребывания требования в системе*

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\overline{N}_C}{\lambda \times (1 - P_{отк})}; \quad (4.31)$$

– *средняя продолжительность пребывания требования в очереди*

$$\bar{t}_{ож} = \bar{t}_{сист} - \bar{t}_{об}; \quad (4.32)$$

– *среднее число требований*, *находящихся в очереди* (*длина очереди*)

$$\bar{r} = \lambda \times (1 - P_{отк}) \times \bar{t}_{ож}. \quad (4.33)$$

4.3 СМО с несколькими параллельно работающими средствами обслуживания (каналами)

Рассмотрим постановку задачи, в которой ***длина очереди не ограничена***. Следовательно, заявка, поступившая в СМО в момент, когда все n каналов заняты, становится в очередь и ожидает своего обслуживания. Любое пришедшее требование будет удовлетворено. Установившийся режим работы системы существует при $\frac{\rho}{n} < 1$. Если условие не выполняется (то есть $\frac{\rho}{n} \geq 1$), то очередь заявок в системе с течением времени станет неограниченно расти.

К числу показателей функционирования многоканальной СМО с очередью (ее длина не ограничена) относят также:

– *предельные вероятности системы*

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n! \times \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)}\right]^{-1}, \quad (4.34)$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} \times P_0, \; k \leq n; \quad (4.35)$$

– *вероятность того*, *что все обслуживающие каналы заняты*

$$\pi = \frac{\rho^n}{(n-1)! \times (n - \rho)} \times P_0; \quad (4.36),$$

– среднее число занятых каналов

$$\overline{N}_{З} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho ; \tag{4.37}$$

– среднее число требований, находящихся в очереди (длина очереди)

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} \times P_0}{(n-1)! \times (n-\rho)^2} ; \tag{4.38}$$

– среднее число требований, находящихся в системе

$$\overline{N}_{C} = \bar{r} + \rho ; \tag{4.39}$$

– средняя продолжительность пребывания требования в очереди

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho^n \times P_0}{n \times \mu \times n! \times \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}, \tag{4.40}$$

или

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda} ; \tag{4.41}$$

– средняя продолжительность пребывания требования в системе

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об} . \tag{4.42}$$

Для того чтобы очередь не росла до бесконечности, уровень загрузки должен быть меньше единицы, то есть $\frac{\rho}{n} < 1 \Rightarrow n > 1 \; (2, 3, 4 ...)$. Для СМО с ожиданием необходимо рассчитать функцию потерь $(G_П)$ за определенный интервал времени (T) по формуле

$$G_П = \left(g_{ПК} \times \overline{N}_П + g_{ож} \times \bar{r}\right) \times T , \tag{4.43}$$

где $g_{ПК}$ – стоимость единицы времени простоя обслуживающего канала; $g_{ож}$ – стоимость потерь за единицу времени, связанных с ожиданием требования в очереди; $\overline{N}_{П}$ – среднее число простаивающих каналов (находится из формулы $\overline{N}_{З} = n - \overline{N}_{П}$); $\overline{r}$ – средняя длина очереди, то есть среднее количество требований, ожидающих начала обслуживания.

Рассмотрим СМО с несколькими параллельно работающими средствами обслуживания (каналами), в которой ***длина очереди ограничена***. Эта модель отличается от предыдущей тем, что емкость СМО ограничена сверху значением $m + n$ (число мест в очереди ограничено, а максимальная ее длина равна *m*). Следовательно, если число требований в очереди равно *m*, то заявка покидает систему необслуженной.

К числу показателей функционирования многоканальной СМО с очередью (длина очереди ограничена) относят:

– предельные вероятности системы

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} \times \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} \right]^{-1}, \quad \frac{\rho}{n} \neq 1, \tag{4.44}$$

1. $$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} \times (m+1) \right]^{-1}, \quad \frac{\rho}{n} = 1, \tag{4.45}$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} \times \mathrm{P}_0, \; 1 \le k \le n, \tag{4.46}$$

$$P_k = \frac{\rho^n}{\mathrm{n}!} \times \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} \times \mathrm{P}_0, \; n \le k \le m+n; \tag{4.47}$$

– вероятность отказа

$$P_{отк} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \times n!} \times \mathrm{P}_0; \tag{4.48}$$

– относительная пропускная способность (*вероятность того*, *что поступившее в систему требование будет принято к облуживанию*)

$$Q = 1 - P_{отк}; \qquad (4.49)$$

– абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda \times Q; \qquad (4.50)$$

– среднее число занятых каналов

$$N_З = \frac{A}{\mu}; \qquad (4.51)$$

– среднее число требований, находящихся в очереди (длина очереди)

$$\bar{r} = P_0 \times \frac{\rho^{n+1}}{n! \times n} \times \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \times \left(m + 1 - m \times \frac{\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2},\ \frac{\rho}{n} \neq 1, \qquad (4.52)$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^n \times m \times (m+1)}{2 \times n!} \times P_0,\ \frac{\rho}{n} = 1; \qquad (4.53)$$

– среднее число требований, находящихся в системе

$$\overline{N}_C = \bar{r} + \overline{N}_З; \qquad (4.54)$$

– средняя продолжительность пребывания требования в системе

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\overline{N}_C}{\lambda \times (1 - P_{отк})} = \frac{\overline{N}_C}{A}, \qquad (4.55)$$

– средняя продолжительность пребывания требования в очереди

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{A}, \qquad (4.56)$$

или

$$\bar{t}_{ож} = \bar{t}_{сист} - \bar{t}_{об}. \qquad (4.57)$$

4.4 Замкнутые СМО

Система состоит из n каналов обслуживания, каждый из которых может одновременно обслуживать только одно требование. Поток поступающих требований ограничен. В СМО не может находиться более m требований. Очередь может возникнуть тогда, когда число каналов меньше наибольшего числа требований, находящихся одновременно в обслуживающей системе, т. е. $n < m$.

К числу показателей замкнутых СМО относят:

– вероятность того, что в системе находится k требований при условии, что их число не превосходит числа обслуживающих каналов

$$P_k = \frac{m! \times \rho^k}{k! \times (m-k)!} \times P_0,\ k = \overline{1,n}; \tag{4.58}$$

– вероятность того, что в системе находится k требований для случая, когда их число больше числа обслуживающих каналов

$$P_k = \frac{m! \times \rho^k}{k! \times (m-k)! \times n^{k-n}} \times P_0,\ k = \overline{n,m}; \tag{4.59}$$

– вероятность того, что в системе нет ни одного требования (все обслуживающие каналы свободны)

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{m! \times \rho^k}{k! \times (m-k)!} + \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{m! \times \rho^k}{n! \times (m-k)! \times n^{k-n}}}; \tag{4.60}$$

– среднее число требований, находящихся в очереди (длина очереди)

$$\bar{r} = \sum_{k=n+1}^{m} (k-n) \times P_k; \tag{4.61}$$

или

$$\bar{r} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(k-n) \times m!}{n^{k-n} \times n! \times (m-k)!} \times \rho^k \times P_0; \tag{4.62}$$

– среднее число требований, находящихся в системе

$$\overline{N}_C = \sum_{k=1}^{m} k \times P_k \ ; \tag{4.63}$$

– среднее число простаивающих каналов (свободных от обслуживания)

$$\overline{N}_П = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \times P_k \ , \tag{4.64}$$

или

$$\overline{N}_П = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k) \times m!}{k! \times (m-k)!} \times \rho^k \times P_0 \, ; \tag{4.65}$$

– коэффициент простоя требования

$$K_{П.Т.} = \frac{\overline{r}}{m} \, ; \tag{4.66}$$

– коэффициент простоя обслуживающего канала

$$K_П = \frac{\overline{N}_П}{n} \, . \tag{4.67}$$

Существуют другие виды математических задач в зависимости от постановки модели. Например, в практике имеется ***многоканальная СМО с отказами и со взаимопомощью между каналами типа «все как один»***. Такая ситуация характеризуется тем, что при появлении первой заявки ее начинают обслуживать все n каналов, которые будут занятыми до тех пор, пока заявка не будет обслужена. Если во время занятости всех каналов поступает требование, то оно подучает отказ и покидает систему. После завершения обслуживания все n каналов оказываются свободны до тех пор, пока не поступит следующая заявка. На ее обслуживание переключаются опять же все n каналов и т. д. Таким образом, все n каналов работают как один, а такую дисциплину взаимопомощи называют «***все как один***». При подобной постановке задачи n-канальная СМО работает как одноканальная, но с более высокой интенсивностью обслуживания.

Ответ на вопрос – выгодно или нет вводить взаимопомощь между каналами типа «все как один» – во многом зависит от того, какая величина выбирается в качестве основной при определении конечного эффекта работы

СМО. Если цель – снижение времени пребывания заявки в системе, то целесообразность «взаимопомощи» очевидна. С точки зрения пропускной способности подобный подход неэффективен.

5 ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

ПРИМЕР 1. В гипермаркет торговой сети *N* планируется ввести в работу продавцов. Посещение покупателем торговую сеть – событие случайное и независимое. Можно предположить, что поток требований является пуассоновским.

В торговой сети реализуются различные виды изделий, и на их просмотр и покупку затрачивается неодинаковое время. Можно также предположить, что распределение продолжительности времени является показательным (экспоненциальным).

5.1 Расчет основных параметров одноканальной СМО (M/M/1)

РЕШЕНИЕ

Таблица 2 – Статистическое исследование потока требований

Количество посетителей k	Вероятность нахождения k требований в системе P_k	Частота		$\frac{(m_k - P_k \times N)^2}{P_k \times N}$ χ^2
		теоретическая (по закону Пуассона) $P_k \times N$	фактическая (по наблюдению) m_k	
2	0,00227	0,5	1	0,66
3	0,00757	1,5	1	0,17
4	0,01892	3,8	3	0,16
5	0,03783	7,6	6	0,32
6	0,06306	12,6	10	0,54
7	0,09008	18,0	15	0,50
8	0,11260	22,5	20	0,28
9	0,12511	25,0	27	0,16
10	0,12511	25,0	31	1,43
11	0,11374	22,7	28	1,21
12	0,09478	19,0	22	0,49
13	0,07291	14,6	16	0,14
14	0,05208	10,4	8	0,56
15	0,03472	6,9	6	0,13
16	0,02170	4,3	4	0,03
17	0,01276	2,6	2	0,12
18	0,00709	1,4	0	1,42
Сумма	**1**	**198,4**	**200**	**8,32**

Проверим вероятность предположений. С этой целью регистрировалось количество покупателей, прибывающих в гипермаркет в течение часа. Наблюдение производилось в течение 200 ч (то есть 200 раз). Среднее число покупателей оказалось равным 10, то есть λ = 10. Затем было сгруппировано количество случаев m_k с одинаковым числом k покупателей, то есть определены фактические частоты (см. табл. 2). Затем по формуле Пуассона определены вероятности появления k покупателей

$$P_k = \frac{(\lambda \times t)^k}{k!} \times e^{-\lambda t} \qquad (k = 2,...). \tag{5.1}$$

Так как $\sum P_k = 1$, а общее количество интервалов равно N = 200, то теоретическая частота появления k посетителей равна $P_k \times N$. За единицу времени принят 1 ч. Подставив вместо λ и t их значения (λ = 10 и t = 1), получим

$$P_k \times N = \frac{10^k}{k!} \times e^{-10} \times N \qquad (k = 2,...). \tag{5.2}$$

Для того чтобы выяснить, с какой вероятностью распределение количества требований является пуассоновским, необходимо определить χ^2

$$\chi^2 = \sum_k \frac{(m_k - N \times P_k)^2}{N \times P_k}. \tag{5.3}$$

Следовательно $\chi^2 = 8{,}32$.

Количество степеней свободы (d_f) равно 15 $(d_f = n-2)$, где n – число групп с различным количеством покупателей (n=17).

По специальным таблицам распределения χ^2 находим, что с вероятностью 0,89 рассматриваемый поток требований является пуассоновским.

Далее необходимо убедиться в том, что распределение продолжительности одного обслуживания является экспоненциальным. С этой целью на протяжении всего периода с помощью соответствующего прибора регистрировалась продолжительность обслуживания каждого покупателя.

Так как λ = 10, то всего было обслужено $M = 10 \times 200 = 2000$ покупателей. Непосредственно на обслуживание (без учета простоя) затрачено времени 154,0 ч. На одного покупателя в среднем было затрачено $\bar{t}_{об} = \frac{154{,}0}{2000} = 0{,}077\ ч$ или 4,62 мин.

Далее рассчитываются теоретические частоты по формуле (см. табл. 3).

$$P(\tau)=e^{-\mu\times\bar{t}_{об}}, \quad (5.4)$$

где $\mu=\frac{2000}{154,0}=13$.

Интервал времени $\bar{t}_{об}$ измеряется в тех единицах (часах), для которых определена μ. Величину $\bar{t}_{об}$ можно представить и так

$$\bar{t}_{об}=\frac{\tau}{60}, \quad (5.5)$$

где τ – в минутах. Тогда

$$P(\tau)=e^{-\mu\times\bar{t}_{об}}=e^{-\mu\times\tau/60}=e^{-13\times\tau/60}. \quad (5.6)$$

Подставляя вместо τ его значения: 0, 1, 2, …, 23 мин и умножив $P(\tau)$ на M, получим кумулятивные частоты по экспоненциальному закону (см. табл. 3).

Таблица 3 – Статистическое изучение продолжительности обслуживания

Продолжительность, мин	$P(\tau)$	Кумулятивная частота теоретическая $P(\tau)\times M$	Кумулятивная частота по наблюдению m_k	$\frac{(m_k-P(\tau)\times M)^2}{P(\tau)\times M}$ χ^2
0	1	2000	2000	0,00
1	0,80520	1610,4	1760	13,90
2	0,64834	1296,7	1250	1,68
3	0,52205	1044,1	1120	5,52
4	0,42035	840,7	830	0,14
5	0,33847	676,9	706	1,25
6	0,27253	545,1	560	0,41
7	0,21944	438,9	460	1,02
8	0,17669	353,4	360	0,12
9	0,14227	284,5	300	0,84
10	0,11456	229,1	240	0,52
11	0,09224	184,5	173	0,72
12	0,07427	148,5	158	0,60
13	0,05980	119,6	110	0,77
14	0,04815	96,3	102	0,34
15	0,03877	77,5	85	0,72
16	0,03122	62,4	70	0,91
17	0,02514	50,3	55	0,44
18	0,02024	40,5	44	0,31
19	0,01630	32,6	29	0,40
20	0,01312	26,2	23	0,40
21	0,01057	21,1	19	0,22
22	0,00851	17,0	22	1,46
23	0,00685	13,7	17	0,79

Определим значение

$$\chi^2 = \sum_k \frac{\left(m_k - P(\tau)\times M\right)^2}{P(\tau)\times M}. \qquad (5.7)$$

Следовательно $\chi^2 = 33,48$.

По таблицам для χ^2 находим, что с вероятностью 0,75 продолжительность обслуживания одного требования распределена по экспоненциальному закону. Тогда приведенные формулы справедливы для расчета количественных характеристик СМО.

Рассчитаем характеристики СМО.

Так как $\lambda = 10$ и $\mu = 13$, то

1. *Коэффициент загрузки* равен

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad (5.8)$$

$$\rho = \frac{10}{13} = 0,77, \quad \rho < 1,$$

это говорит о том, что очередь не может быть постоянной.

Обязательно будут такие интервалы времени, когда очереди не будет, и продавец торговой сети будет свободен.

2. *Коэффициент простоя продавца (вероятность того, что продавец гипермаркета будет свободен)* равен

$$P_0 = \beta = 1 - \rho, \qquad (5.9)$$

$$P_0 = 1 - 0,77 = 0,23.$$

Продавец не будет постоянно занят. Это является следствием образования интервалов времени, когда очереди не будет.

3. *Среднее число покупателей в системе* (*в гипермаркете*) составит

$$\overline{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k \times P_k = \frac{\rho}{1-\rho}, \qquad (5.10)$$

$$\overline{k} = \frac{0,77}{1-0,77} = 3,35 \text{ чел.}$$

4. *Среднее число покупателей в очереди* составит

$$\bar{v} = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \times P_k = \bar{k} - 1 + P_0 = \bar{k} - \rho \,, \tag{5.11}$$

$$\bar{v} = 3{,}35 - 0{,}77 = 2{,}58 \text{ чел.}$$

5. *Среднее время ожидания покупателей в очереди* (*без учета времени обслуживания*) составит

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{\bar{k}}{\mu} \,, \tag{5.12}$$

$$\bar{t}_{ож} = \frac{2{,}58}{10} = 0{,}258 \text{ ч} \text{ или } 15{,}48 \text{ мин.}$$

6. *Среднее время пребывания покупателей в торговой сети* составит

$$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об} \,, \tag{5.13}$$

$$\bar{t}_{сист} = 15{,}48 + 4{,}62 = 20{,}1 \text{ мин.}$$

В среднем время пребывания покупателя в гипермаркете примерно в 4,3 раза больше времени его обслуживания, так как

$$\frac{20{,}1}{4{,}62} \approx 4{,}3 \,.$$

7. *Среднее число прибывших покупателей в торговую сеть за 10-часовой рабочий день* составит

$$N_{CP} = T \times \lambda \,, \tag{5.14}$$

$$N_{CP} = 10 \times 10 = 100 \text{ чел.}$$

8. *Общие потери времени покупателей за день* (*ожидание в очереди в торговой сети*) составят

$$t_{общ} = \bar{t}_{ож} \times N \,, \tag{5.15}$$

$$t_{общ} = 0{,}258 \times 100 = 25{,}8 \text{ ч.}$$

9. *Общие потери времени продавцов за день* составят

$$T_{П.П.} = T \times (1-\rho), \tag{5.16}$$

$$T_{П.П.} = 10 \times (1-0{,}77) = 2{,}3 \text{ ч.}$$

Предположим, что через некоторое время (с приближением летних дней) число покупателей, прибывающих в торговую сеть за 1 ч, возросло с 10 до 12 чел., то есть $\lambda = 12$.

Выполним аналогичный расчет для этого случая.

1. *Коэффициент загрузки* составит

$$\rho = \frac{12}{13} = 0{,}92, \ \rho < 1,$$

это говорит о том, что очередь может быть постоянной.

Обязательно будут такие интервалы времени, когда очередь будет, и продавец торговой сети будет практически всегда занят.

2. *Коэффициент простоя продавца* (*вероятность того*, *что продавец гипермаркета будет свободен*) равен

$$P_0 = 1 - 0{,}92 = 0{,}08\,.$$

Продавец почти непрерывно занят. Это является следствием возрастания очереди.

3. *Среднее число покупателей в системе* (*в гипермаркете*) составит

$$\bar{k} = \frac{0{,}92}{1-0{,}92} = 11{,}5 \text{ чел.}$$

4. *Среднее число покупателей в очереди* составит

$$\bar{v} = 11{,}5 - 0{,}92 = 10{,}58 \text{ чел.}$$

5. *Среднее время ожидания покупателей в очереди* (*без учета времени обслуживания*) составит

$$\bar{t}_{ож} = \frac{10{,}58}{12} = 0{,}88 \text{ ч} \ \text{ или } \ 52{,}8 \text{ мин.}$$

6. *Среднее время пребывания покупателя в гипермаркете* составит

$$\bar{t}_{сист} = 52{,}8 + 4{,}62 = 57{,}42 \text{ } мин.$$

В среднем время пребывания покупателя в гипермаркете примерно в 12,4 раза больше времени его обслуживания, так как

$$\frac{57{,}42}{4{,}62} \approx 12{,}4.$$

Увеличение числа покупателей, прибывающих в течение часа в торговую сеть, с 10 до 12 чел., привело к возрастанию среднего числа покупателей в очереди с 2,58 до 10,58 чел. и соответственно среднего времени ожидания покупателя в очереди с 15,48 до 52,8 мин.

7. *Среднее число прибывших покупателей в торговую сеть за 10-часовой рабочий день* составит

$$N_{CP} = 10 \times 12 = 120 \text{ } чел.$$

8. *Общие потери времени покупателей за день* (*ожидание в очереди в торговой сети*) составят

$$\bar{t}_{общ} = 0{,}88 \times 120 = 105{,}6 \text{ } ч.$$

9. *Общие потери времени продавцов за день* составят

$$T_{П.П.} = 10 \times (1 - 0{,}92) = 0{,}8 \text{ } ч.$$

5.2 Расчет основных параметров многоканальной СМО (M/M/S)

Теперь предположим, что число каналов обслуживания увеличили до двух. Как это отразится на показателях по обеим задачам для $\lambda = 10$ и $\lambda = 12$?

Выполним расчет для $\lambda = 10$, $s = 2$, $\rho = 0{,}77$, где λ – среднее число покупателей в торговой сети; s – число каналов обслуживания; ρ – коэффициент загрузки.

1. *Коэффициент простоя продавца* (*вероятность того*, *что в торговую сеть не прибудет ни один покупатель в течение 1 ч*) равен

$$P_0 = \frac{1}{\frac{\rho^s}{s! \times \left(1 - \frac{\rho}{s}\right)} + 1 + \frac{\rho}{1} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!}}, \tag{5.17}$$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{0{,}77^2}{2! \times \left(1 - \frac{0{,}77}{2}\right)} + 1 + \frac{0{,}77}{1}} = 0{,}44 .$$

2. *Среднее число покупателей в очереди* составит

$$\bar{v} = \frac{\rho^{s+1}}{s \times s! \times \left(1 - \frac{\rho}{s}\right)^2} \times P_0 , \tag{5.18}$$

$$\bar{v} = \frac{0{,}77^3}{2 \times 2! \times \left(1 - \frac{0{,}77}{2}\right)^2} \times 0{,}44 = 0{,}14 \text{ чел.}$$

3. *Среднее число покупателей в системе* (*в торговой сети*) составит

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^{\infty} k \times P_k = \bar{v} + \rho , \tag{5.19}$$

$$\bar{k} = 0{,}14 + 0{,}77 = 0{,}91 \text{ чел.}$$

4. *Среднее время ожидания покупателей в очереди* (*без учета времени обслуживания*) составит

$$\bar{t}_{ож} = \frac{0{,}14}{10} = 0{,}014 \text{ ч} \text{ или } 0{,}84 \text{ мин.}$$

5. *Общие потери времени в ожидании* (*всеми покупателями*) составят

$$\bar{t}_{общ} = 0{,}014 \times 100 = 1{,}4 \text{ ч.}$$

6. *Среднее время пребывания покупателя в гипермаркете* составит

$$\bar{t}_{сист} = 0{,}84 + 4{,}62 = 5{,}46\ мин.$$

7. *Коэффициент простоя продавцов* составит

$$\beta = \frac{\sum_{k=0}^{s}(s-k)\times P_k}{s} = \frac{s-\rho}{s}, \tag{5.20}$$

$$\beta = \frac{2-0{,}77}{2} = 0{,}615.$$

8. *Общие потери времени у продавцов за день* составят
8.1. *Среднее число не занятых каналов обслуживания*

$$\bar{z} = s - \rho, \tag{5.21}$$

$$\bar{z} = 2 - 0{,}77 = 1{,}23.$$

8.2. *Коэффициент использования времени продавцов*

$$K_{И.П.} = \frac{s-\bar{z}}{s}, \tag{5.22}$$

$$K_{И.П.} = \frac{2-1{,}23}{2} = 0{,}385.$$

8.3. *Потери времени продавцов*

$$T_{П.П.} = \beta \times T \times s, \tag{5.23}$$

$$T_{П.П.} = 0{,}615 \times 10 \times 2 = 12{,}3\ ч.$$

Теперь *выполним расчет для λ = 12, s = 2, ρ = 0,92*, где λ – среднее число покупателей в торговой сети; s – число каналов обслуживания; ρ – коэффициент загрузки.

1. *Коэффициент простоя продавца* (*вероятность того*, *что в торговую сеть не прибудет ни один покупатель в течение 1 ч*) равен

$$P_0 = \frac{1}{\frac{0{,}92^2}{2!\times\left(1-\frac{0{,}92}{2}\right)}+1+\frac{0{,}92}{1}} = 0{,}37\ .$$

2. *Среднее число покупателей в очереди* составит

$$\bar{\nu} = \frac{0{,}92^3}{2\times 2!\times\left(1-\frac{0{,}92}{2}\right)^2}\times 0{,}37 = 0{,}25\ \textit{чел.}$$

3. *Среднее число покупателей в системе* (*в торговой сети*) составит

$$\bar{k} = 0{,}25 + 0{,}92 = 1{,}17\ \textit{чел.}$$

4. *Среднее время ожидания покупателей в очереди* (*без учета времени обслуживания*) составит

$$\bar{t}_{ож} = \frac{0{,}25}{12} = 0{,}021\ \textit{ч или}\ 1{,}26\ \textit{мин.}$$

5. *Общие потери времени в ожидании* (*всеми покупателями*) составят

$$\bar{t}_{общ} = 0{,}021\times 120 = 2{,}52\ \textit{ч.}$$

6. *Среднее время пребывания покупателя в гипермаркете* составит

$$\bar{t}_{сист} = 1{,}26 + 4{,}62 = 5{,}88\ \textit{мин.}$$

7. *Коэффициент простоя продавцов* составит

$$\beta = \frac{2-0{,}92}{2} = 0{,}54\ .$$

8. *Общие потери времени у продавцов за день* составят
8.1. *Среднее число не занятых каналов обслуживания*

$$\bar{z} = 2 - 0{,}92 = 1{,}08\ .$$

8.2. *Коэффициент использования времени продавцов*

$$K_{И.П.} = \frac{2-1,08}{2} = 0,46 .$$

8.3. *Потери времени продавцов*

$$T_{П.П.} = 0,54 \times 10 \times 2 = 10,8 \text{ } ч.$$

Сравнительные данные СМО обслуживания приведены в таблице 4.

Из данных таблицы видно, что при возрастании числа покупателей торговой сети λ (в течение часа) с 10 до 12 чел. увеличивается среднее время ожидания покупателя в очереди: при одном продавце с 15,48 до 52,8 мин; при двух продавцах – с 0,84 до 1,26 мин. Соответственно, общее время ожидания всеми покупателями (в среднем) за 10-часовой рабочий день изменится с 25,8 до 105,6 ч и с 1,4 до 2,52 ч соответственно.

Таким образом, убеждаемся в том, что благодаря увеличению количества продавцов с одного до двух достигается значительная экономия свободного времени трудящихся.

Таблица 4 – Сравнительная характеристика организации СМО торговой сети при различном числе каналов обслуживания

Показатели	$\lambda = 10$		$\lambda = 12$	
	$s = 1$, $\rho = 0,77$	$s = 2$, $\rho = 0,77$	$s = 1$, $\rho = 0,92$	$s = 2$, $\rho = 0,92$
P_0	0,23	0,44	0,08	0,37
$\overline{k}$	3,35	0,91	11,5	1,17
$\overline{\nu}$	2,58	0,14	10,58	0,25
$t_{ож}$, мин	15,48	0,84	52,8	1,26
Количество покупателей, поступивших за день, чел.	100	100	120	120
Суммарное время ожидания за день всеми покупателями, ч	25,8	1,4	105,6	2,52
Суммарное время простоя продавцов, ч	2,3	12,3	0,8	10,8

6 ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ВАРИАНТ 1

Информационная служба склада предприятия дает справки по телефону о наличии запасных частей, которые необходимы для ремонта производственной техники. В среднем за одну минуту поступают три запроса, а средняя продолжительность одного разговора составляет 0,25 минуты. Считая все потоки простейшими и рассматривая в качестве экономико-математической модели одноканальную СМО с отказами,

Необходимо:

– определить важнейшие характеристики рассматриваемой системы.

ВАРИАНТ 2

Информационно-справочное бюро региональной базы производственного обслуживания имеет трех операторов, отвечающих на звонки о наличии нужных деталей на складах объединения. Телефонные аппараты взаимосвязаны. Поэтому в случае поступления звонка, когда хотя бы один из операторов не занят, справка выдается путем переключения на свободный номер. Если поступает звонок, когда все операторы заняты, то абонент получает отказ. В среднем за одну минуту в информационно-справочное бюро поступают четыре запроса, время обслуживания каждого требования составляет 1,5 минуты.

Необходимо определить:

– в течение какого времени все операторы свободны;

– какова вероятность отказа при существующей работе бюро с тремя операторами;

– рассчитать относительную и абсолютную пропускную способность, среднее число занятых каналов, коэффициенты использования и простоя каналов, среднее число простаивающих каналов;

– найти требуемое количество операторов с учетом того, что руководство базы производственного обслуживания поставило цель – не более 10 % позвонивших должны получить отказ, т. е. сигнал «занято».

ВАРИАНТ 3

Ремонтная мастерская по техническому обслуживанию автомобилей оказывает услуги и физическим лицам, имеющих транспортные средства. На этой линии постоянно работают четыре мастера. При этом соблюдается условие: если клиент приезжает, когда все мастера заняты, он уходит из мастерской, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую в течение часа, – 6 человек. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание транспорта физического лица, – 20 минут.

Необходимо:

– определить основные характеристики функционирования данной мастерской в предельном режиме.

ВАРИАНТ 4

Предприятие оборудовало в одном из своих филиалов пункт технического осмотра для индивидуальных владельцев автомобилей. Первоначально в пункте трудились 2 служащих, и статистика показала, что время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону. При этом в среднем в течение смены каждый из служащих пункта технического осмотра успевает провести технический осмотр 10 автомобилей. Общее число автомобилей, находящихся в эксплуатации у населения, очень велико. Они независимо друг от друга в различное время требуют осмотра и профилактического ремонта. Установлено, что в среднем в течение рабочего дня в пункт обращается 20 человек, причем, застав служащих занятыми, автолюбители уезжают в другую фирму.

Планово-экономический отдел рассматривает вопрос о целесообразности дополнительного привлечения служащих с установкой соответствующего оборудования в пункт технического осмотра на следующий месяц (25 рабочих дней). Известно, что стоимость простоя обслуживающего канала (то есть зарплата персоналу, аренда оборудования и т. д.) составляет в день 30 у. д. е. В тоже время каждый необслуженный клиент приносит потери в количестве 50 у. д. е.

Необходимо:

– определить оптимальное число служащих в предстоящий месяц для рассматриваемой СМО.

ВАРИАНТ 5

Предприятие легкой промышленности открыло торговую точку для реализации своей продукции. Киоск имеет одного продавца. В нормальном режиме за каждый час торговую точку посещают 24 человека (предполагается пуассоновское распределение времени посещения). Среднее время обслуживания покупателей подчинено экспоненциальному закону и составляет 0,5 минуты.

Необходимо определить:

– вероятность того, что система обслуживания (продавец) окажется занятой;

– среднюю длину очереди;

– среднее число покупателей в данной системе;

– среднее время, которое покупатель проводит в очереди;

– среднее время, которое покупатель проводит в системе обслуживания.

Руководство предприятия легкой промышленности предполагает, что в связи с наступлением весенне-летнего сезона потребность в товарах может привести к притоку покупателей. Такая ситуация при низком уровне обслуживания вызовет потери потенциальных покупателей, поэтому поставлена задача: установить другой кассовый аппарат с привлечением продавца, если среднее время пребывания покупателя в очереди превысит 5 минут.

Как должна измениться интенсивность входного потока покупателей, чтобы возникла такая необходимость?

ВАРИАНТ 6

Пункт технического осмотра сервисной организации имеет один бокс для диагностики импортных автомобилей. Водители прибывают в соответствии с распределением Пуассона с интенсивностью 4 машины в час и могут ожидать обслуживания на стоянке рядом с центром техосмотра. Время диагностики автомобиля – экспоненциально распределенная случайная величина – равно в среднем 10 минут.

Необходимо определить:

– вероятность того, что бокс для диагностики свободен;

– среднее число автомобилей, находящихся в системе обслуживания;

– среднее количество автомашин, ожидающих в очереди;

– среднее время пребывания в очереди;

– среднее время пребывания автомобиля в центре технического осмотра.

Руководство сервисной организации ведет конкурентную борьбу с другими фирмами, которые оказывают аналогичные услуги.

Поставлена задача: установить количество мест на стоянке автомобилей, при котором, по меньшей мере, 90 % прибывших автомобилей найдет себе оборудованную стоянку.

ВАРИАНТ 7

Пункт технического осмотра имеет четыре специально оборудованных места для стоянки автомобилей. Водители прибывают в соответствии с распределением Пуассона с интенсивностью 4 машины в час и могут ожидать обслуживания на стоянке рядом с центром техосмотра. Время диагностики автомобиля – экспоненциально распределенная случайная величина – равно в среднем 10 минут. Если все места на стоянке заняты, прибывающие автомобили вынуждены искать другую фирму, занимающуюся диагностикой импортных машин.

Необходимо определить:

– вероятность того, что прибывший автомобиль сразу же попадет в бокс для диагностики;

– вероятность того, что все места на стоянке автомобилей заняты;

– среднее время ожидания клиентов до начала обслуживания и среднее время пребывания автовладельца в системе;

– среднее число автомобилей, находящихся в обслуживающей системе, и длину очереди;

– среднее число свободных мест на стоянке автомобилей.

Руководство сервисной организации планирует увеличить количество мест для стоянки автомобилей. Для принятия решения необходимо рассчитать количество необслуженных клиентов (зная λ, долю потерянных автовладельцев $\left(P_{отк}\right)$ и время работы пункта в день – 12 часов).

ВАРИАНТ 8

Организация ремонтирует и восстанавливает электрические генераторы, которые затем используются для нужд различных предприятий. Конечная сборка каждого экземпляра проходит в соответствии с распределением Пуассона – в среднем 9 генераторов в час. Затем электрические генераторы с помощью ленточного конвейера транспортируются в отдел технического контроля для испытаний. На конвейере может находиться максимум 6 генераторов. Электронный датчик автоматически останавливает конвейер, как только он заполнен. Рабочие сборочного цеха прекращают свою работу до появления свободного места на конвейере. Время проверки электрических генераторов имеет экспоненциальное распределение со средним значением 12 минут.

Необходимо:

– определить вероятность того, что сборочный цех прекратит сборку электрогенераторов в условиях рассматриваемой СМО.

ВАРИАНТ 9

Предприятие имеет участок контроля, который состоит из 6 испытательных стендов. Отремонтированные изделия поступают на контроль с интенсивностью 5 штук в минуту. Среднее время, затрачиваемое на контроль одного изделия, – 36 секунд. Так как процесс производства на предприятии непрерывный, то при малом числе стендов на контроле может скопиться неограниченное число изделий. Поэтому данную СМО можно отнести к числу систем с ожиданием (с неограниченным входящим потоком требований), то есть длина очереди не ограничена. При этом необходимо считать, что входящий поток требований – простейший, а время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону.

Необходимо:

– определить важнейшие характеристики данной СМО.

ВАРИАНТ 10

На базе торгового предприятия производится разгрузка автомобилей, прибывающих с разными товарами от оптовых поставщиков. Автофургоны прибывают в случайные моменты времени. Каждый из них подходит к разгрузке в среднем через 2 часа, то есть интенсивность поступления товаров от поставщиков примерно одинакова. Руководство торгового предприятия установило 12-часовой режим работы. Суммарно на разгрузку прибывает поток автомобилей с интенсивностью 6 единиц в день. Обслуживание осуществляется автокарами, которые в среднем за день могут осуществить работу по разгрузке 4 автофургонов. Процесс деятельности базы состоит в том, что прибывший автофургон либо разгружается немедленно любым из свободных автокаров, либо ожидает освобождения одного из них.

Между поставщиками товаров и торговым предприятием существует договор, один из пунктов которого требует своевременного обслуживания прибывающих автофургонов. В случае простоя в очереди торговое предприятие должно уплатить штраф в размере 25 у. д. е. за 1 автомобиль в день. Вместе с тем автокары для разгрузки автофургонов данной партии товаров база арендует, а стоимость простоя одного обслуживающего канала (автокара) составляет в день 15 у. д. е.

Необходимо:

– определить оптимальное число единиц техники по разгрузке товаров для данной СМО.

ВАРИАНТ 11

На складе торгового предприятия работают 4 кладовщика, они заняты отпуском запасных частей и деталей для товаропроизводителей. В среднем в течение одного часа поступает 2 заявки (поток покупателей имеет пуассоновское распределение). Время обслуживания имеет экспоненциальное распределение со средним значением 1,5 часа на одно требование.

Необходимо определить:

– показатели работы данной СМО:

– интенсивность нагрузки;

– вероятность того, что все рабочие свободны;

– вероятность того, что все кладовщики заняты отпуском запасных частей и деталей;

– среднее число покупателей в очереди;

– среднее время ожидания обслуживания;

– среднее время пребывания в системе;

– среднее число находящихся в системе требований.

ВАРИАНТ 12

Цех по ремонту аккумуляторов имеет 5 мастеров. В среднем в течение рабочего дня поступает в ремонт 10 аккумуляторов. Так как общее число данных приборов очень велико, и они независимо друг от друга в различное время выходят из строя, то можно считать, что поток заявок на ремонт аккумуляторов случаен (пуассоновский). Время на проведение ремонта зависит во многом от серьезности повреждения, квалификации мастера и других причин. Статистика показывает, что время ремонта подчиняется экспоненциальному закону, а среднее время, затрачиваемое на ремонт одного аккумулятора в течение 7-часового рабочего дня, составляет 2,8 часа.

Необходимо:

– оценить функционирование цеха по ремонту аккумуляторов, рассчитав основные характеристики данной СМО (за единицу времени принять 1 день).

ВАРИАНТ 13

Организация в одном из агрогородков открыла небольшую ремонтную мастерскую. Три механика занимаются ремонтом и техническим обслуживанием мотокультиваторов, которые сдают в мастерскую люди, занимающиеся личным подсобным хозяйством. Однако ограниченная емкость мастерской позволяет разместить для ремонта не более 15 мотокультиваторов, не учитывая тех, которые уже ремонтируются. Поэтому, если очередной посетитель приходит в то время, когда все механизмы находятся в ремонте или ожидают обслуживания, его заказ не принимается. Заказчики обращаются в мастерскую в среднем каждые 10 минут, а на выполнение механиком одного ремонта уходит в среднем 30 минут. Клиенты заходят в соответствии с распределением Пуассона, а время выполнения работы подчиняется экспоненциальному распределению.

Необходимо:

– определить основные характеристики данной СМО.

ВАРИАНТ 14

В цехе предприятия, занимающегося регулировкой топливной аппаратуры, имеется 8 станков. Их обслуживанием занимаются 2 мастера. Поток поступающих требований на обслуживание станков – 4 единицы в час. Обслуживание одного станка занимает у работника 3 минуты.

Необходимо:

– определить важнейшие характеристики СМО.

ВАРИАНТ 15

Предприятие легкой промышленности закупило за рубежом в один из своих цехов семь импортных автоматических станков, которые обслуживают два оператора. После того, как каждый станок завершает выполнение пакета программ, оператор должен его перенастроить на выполнение нового пакета. Поток поступающих требований на обслуживание станков пуассоновский и составляет 2 автомата в час. Время настройки описывается экспоненциальным распределением, занимая в среднем 12 минут.

Необходимо:

– определить важнейшие характеристики данной СМО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абчук, В. Н. Экономико-математическое моделирование / В. Н. Абчук. – Санкт-Петербург, 1999. – 310 с.
2. Балашевич, В. Н. Математические методы в управлении производством / В. Н. Балашевич. – Минск, 1995. – 334 с.
3. Колеснёв, В. И. Экономико-математические методы и модели в материально-техническом обеспечении АПК: сборник задач: учеб. пособие / В. И. Колеснёв. – 2-е изд., исправл. – Минск : Дикта, 2012. – 208 с.
4. Миксюк, С. Ф. Экономико-математические методы и модели : учебно-практическое пособие / С. Ф. Миксюк, В. Н. Комкова. – Минск : БГЭУ, 2006. – 219 с.
5. Поттосина, С. А. Экономико-математические модели и методы : учеб. пособие для студ. экон. спец. БГУИР всех форм обуч. / С. А. Поттосина, В. А. Журавлев. – Минск : БГУИР, 2003. – 94 с.
6. Похабов, В. И. Экономико-математические методы и модели : практикум / В. И. Похабов. – Минск : БНТУ, 2003. – 130 с.
7. Саакян, Г. Р. Теория массового обслуживания : лекции для студентов экономических специальностей очной, заочной и дистанционной форм обучения / Г. Р. Саакян. – Шахты : ЮРГУЭС, 2006. – 28 с.
8. Солнышкина, И. В. Теория систем массового обслуживания : учеб. Пособие / И. В. Солнышкина. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2015. – 76 с.
9. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Н. И. Холод [и др.] ; под. общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск : БГЭУ, 1999. – 413 с.
10. Экономико-математические методы и модели. Компьютерные технологии решения : учеб. пособие / И. Л. Акулич [и др.]. – Минск : БГЭУ, 2003. – 348 с.
11. Юферева, О. Д. Экономико-математические методы / О. Д. Юферева. – Минск : БГЭУ, 2002. – 56 с.

Учебное издание

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ СМО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НОРМИРОВАНИЯ

Методические указания для самостоятельной работы студентов экономических специальностей дневной формы обучения

Составители:
Мандрик Ольга Геннадьевна
Стасеня Тамара Петровна

Редактор *Н.В. Медведева*
Корректор *Т.А. Осипова*
Компьютерная верстка *О.Г. Мандрик*

Подписано к печати 13.06.2018. Формат 60x90 $^1/_{16}$. Усл. печ. листов 2,7.
Уч.-изд. листов 3,2. Тираж 30 экз. Заказ № 178.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.