

А.В. ЛОКТИОНОВ, Л.Г. КРЫГИНА

# Теоретическая механика

## Динамика

Учебное пособие для студентов  
технических специальностей  
высших учебных заведений

***Допущено Министерством образования  
Республики Беларусь в качестве  
учебного пособия для студентов  
технических специальностей учреждений,  
обеспечивающих получение высшего  
образования***

Витебск

2004

УДК 531  
ББК 22.2  
Л73

Авторы:

А.В. Локтионов (главы 2, 4 – 8, 10 - 12)

Л.Г. Крыгина (главы 1, 3, 9, 13, 14)

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики учреждения образования «Белорусский национальный технический университет» (г. Минск) А.В. Чигарев;

доктор технических наук, профессор кафедры теоретической механики учреждения образования «Могилевский государственный технический университет», заслуженный деятель науки Республики Беларусь (г. Могилев) Р.М. Игнатищев

**Л73**      **Теоретическая механика, динамика:** Учеб. Пособие / А.В. Локтионов, Л.Г. Крыгина; УО «ВГТУ». –Витебск, 2004. -171 с.  
ISBN 985-6655-89-7

Учебное пособие по теоретической механике содержит краткие сведения по теории, основные формулы и уравнения, необходимые для решения задач динамики. В пособии изложены методические указания к решению задач, приведены примеры их выполнения. Оно составлено в полном соответствии с типовой программой, разработанной Белорусским техническим университетом, и предназначено для студентов технических специальностей учебных заведений.

УДК 531  
ББК 22.2

ISBN 985-6655-89-7

© А.В. Локтионов  
Л.Г. Крыгина, 2004

---

## ВВЕДЕНИЕ

---

Важной задачей при изучении курса теоретической механики является самостоятельная работа студентов. Особую актуальность она приобретает в последнее время в связи с сокращением для ряда специальностей числа аудиторных часов, отводимых на теоретическую механику, и переходом на двухступенчатую подготовку специалистов: бакалавров и магистров.

Для успешного изучения теоретической механики, кроме изучения теории, необходимы навыки в решении задач. Практика показывает, что курс теоретической механики является одним из труднейших и что способы решения задач студентами усваиваются значительно труднее, чем теория предмета. Эти трудности состоят в неумении облекать конкретные физические задачи в абстрактную математическую форму. Поэтому возникает потребность в учебных руководствах и пособиях, которые облегчили бы студентам самостоятельную проработку теоретических разделов курса и помогли бы им научиться самостоятельно применять теорию к решению практических задач.

Предлагаемая работа, как полагают авторы, должна оказать помощь в более быстром приобретении навыков самостоятельного решения задач по динамике курса теоретической механики. В работе приведены краткие сведения по теории, основные формулы и уравнения, необходимые для решения задач динамики. Разумеется, предлагаемое справочное пособие не исключает необходимости глубокого изучения теории. В соответствующих местах пособия даются методические указания к решению задач, приведены примеры их выполнения. Оно составлено в полном соответствии с программой курса теоретической механики, предназначено для студентов всех специальностей вузов с объемом программ от 85-190 часов. Справочным пособием также могут пользоваться инженеры, аспиранты и научные работники.

Авторы надеются, что пособие может оказать существенную помощь и начинающим преподавателям теоретической механики.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....3

## РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

## ДИНАМИКА И КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

## Глава I. Введение в динамику. Динамика материальной точки

1.1 .Основные понятия и определения .....	8
1.2. Дифференциальное уравнение движения материальной точки .....	10
1.3. Решение первой задачи динамики материальной точки .....	11
1.4. Методика решения второй задачи динамики материальной точки .....	13
1.5. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения материальной точки в случае прямолинейного и криволинейного движения .....	14
1.5.1. Случай, когда сила зависит от времени .....	15
1.5.2. Случай, когда сила зависит от скорости .....	17
1.5.3. Случай, когда сила зависит от координаты .....	19

## Глава II . Колебательное движение материальной точки

2.1. Вводные замечания. Виды колебательных движений материальной точки .....	25
2.2. Свободные колебания материальной точки .....	26
2.3. Затухающие колебания материальной точки .....	34
2.4. Вынужденные колебания материальной точки .....	38
2.4.1. Уравнение вынужденных колебаний .....	38
2.4.2. Фаза и амплитуда вынужденных колебаний .....	40
2.5. Вынужденные колебания материальной точки при наличии сопротивления .....	44

## Глава III. Относительное движение

3.1. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки .....	48
3.2. Частные случаи переносного движения .....	49

## РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

### ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

#### Глава IV. Введение в динамику механической системы твёрдого тела

4.1. Классификация сил, действующих на механическую систему.....	55
4.2. Центр масс механической системы.....	56
4.3. Моменты инерции твёрдого тела.....	57

#### Глава V. Теорема о движении центра масс механической системы

5.1. Дифференциальные уравнения движения механической системы.....	60
5.2. Теорема о движении центра масс системы.....	60

#### Глава VI. Теоремы об изменении количества движения материальной точки и механической системы

6.1. Количество движения материальной точки и механической системы.....	65
6.2. Импульс силы.....	66
6.3. Теоремы об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной и интегральной формах.....	66
6.4. Теоремы об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и интегральной формах.....	68

#### Глава VII. Теоремы об изменении кинетического момента материальной точки и механической системы

7.1. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси.....	72
7.2. Теоремы об изменении момента количества движения материальной точки.....	73
7.3. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси.....	75
7.4. Теоремы об изменении кинетического момента механической системы.....	76

#### Глава VIII. Теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы

8.1. Работа силы, приложенной к материальной точке.....	82
8.2. Работа сил, приложенных к механической системе и к твёрдому телу.....	85
8.3. Теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки.....	88
8.4. Кинетическая энергия механической системы. Кинетическая энергия твёрдого тела в частных случаях его движения.....	91
8.5. Теоремы об изменении кинетической энергии механической системы.....	92

## Глава IX. Потенциальная энергия

9.1. Силовое поле. Потенциальное силовое поле .....	99
9.2. Потенциальная энергия .....	100

## Глава X. Принцип Даламбера

10.1. Принцип Даламбера для материальной точки. Сила инерции .....	103
10.2. Принцип Даламбера для механической системы .....	106
10.3. Частные случаи приведения сил инерции твёрдого тела.....	107
10.4. Определение динамических реакций при несвободном движении механической системы .....	113

## Глава XI. Динамика твёрдого тела

11.1. Дифференциальные уравнения поступательного движения твёрдого тела.....	117
11.2. Дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.....	118
11.3. Дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела .....	124

## РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

## ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

## Глава XII. Аналитическая статика

12.1. Связи и их уравнения. Классификация связей.....	127
12.2. Возможные и действительные перемещения.....	129
12.3. Число степеней свободы. Идеальные связи .....	131
12.4. Принцип возможных перемещений .....	132
12.5. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей.....	135
12.6. Принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики).....	139

## Глава XIII. Аналитическая динамика

13.1. Обобщённые координаты системы .....	144
13.2. Обобщённые силы.....	146
13.3. Общее уравнение динамики и условия равновесия в обобщённых координатах .....	151

13.4. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщённых координатах или уравнения Лагранжа второго рода.....	152
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

#### Глава XIV. Теория удара

14.1 Ударная сила и ударный импульс. Действие ударной силы на материальную точку .....	162
14.2. Общие теоремы теории удара.....	163
14.3. Удар двух тел. Удар тела о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления.....	164
14.4. Потеря кинетической энергии при ударе. Теорема Карно.....	166
Литература .....	170

Витебский государственный технологический университет

## Раздел первый

# ДИНАМИКА И КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

---

## Глава I

### ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

#### 1.1. Основные понятия и определения

Динамика - раздел теоретической механики, изучающий механические движения материальных тел под действием сил.

Две одинаковые силы, приложенные к двум различным материальным телам, могут сообщить этим телам за одно и то же время совершенно различные движения, что зависит от инертности этих тел. Инертность - свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.

Масса тела - количественная мера инертности данного тела.

В динамике изучают зависимость между движением материальных тел и действующими на них силами, которые могут быть постоянными или меняющимися по величине и направлению. Как показывает опыт, переменные силы могут определённым образом зависеть от времени, от положения тела и от его скорости.

Основные законы механики Галилея-Ньютона сформулированы применительно к простейшему материальному объекту, называемому материальной точкой. Материальной точкой называют материальное тело (тело, имеющее массу), размерами которого при изучении его движения можно пренебречь.

#### Первый закон динамики

Первый закон динамики (принцип инерции) можно сформулировать следующим образом: изолированная материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. При этом необходимо учитывать, что понятие “покой”, “постоянная скорость” лишены объективного смысла: движение, происходящее с постоянной скоростью в одной системе отсчёта, может представляться ускоренным в другой системе отсчёта. Поэтому принцип инерции не обладает универсальностью.

Введём определение: система отсчёта, в которой справедлив принцип инерции, называется инерциальной системой отсчёта (иногда её условно называют неподвижной).

Фундаментальное значение для всей динамики имеет основной закон динамики (второй закон Ньютона): сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчёта пропорционально величине силы и

имеет направление силы. Математически закон представляется в виде основного уравнения динамики:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{F}$  - сила, действующая на материальную точку,  $\vec{a}$  - её ускорение,  $m$  - масса материальной точки.

Если на материальную точку действует несколько сил, то действие каждой из сил не зависит от действия остальных, при этом ускорение точки равно ускорению, которое приобрела бы точка под действием только одной силы - равнодействующей  $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$ .

Тогда

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = m\vec{a}. \quad (1.2)$$

В этом заключается принцип независимости действия сил.

Второй закон Ньютона устанавливает, как изменяется скорость точки при действии на неё какой-нибудь силы.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает характер механического взаимодействия между телами. Для двух материальных точек он гласит: две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

В международной системе единиц (СИ) эталоном массы служит 1 кг, единицы длины и времени - 1 м и 1 с. Единица силы называется ньютоном. Ньютоном называют силу, сообщаемую массе в 1 кг ускорение, равное  $1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . Таким образом,

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Выделяют две категории динамических задач:

- 1) зная закон движения материальной точки и её массу, определить действующую на неё силу (первая задача динамики);
- 2) зная массу точки и действующую на неё силу, определить закон движения точки (вторая задача динамики).

Эти задачи называются основными задачами динамики точки.

## 1.2. Дифференциальное уравнение движения материальной точки

Используя основной закон динамики, можно вывести дифференциальное уравнение движения материальной точки в различных системах координат. Обозначая равнодействующую всех действующих на точку сил и сил реакций связей через  $\vec{F}$ , а массу точки  $m$ , получим:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.3)$$

Дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме имеет вид:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (1.4)$$

Если спроектировать обе части уравнения (1.4) на неподвижные оси декартовых координат, то получим

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z, \quad (1.5)$$

где  $\frac{d^2 x}{dt^2} = a_x$ ,  $\frac{d^2 y}{dt^2} = a_y$ ,  $\frac{d^2 z}{dt^2} = a_z$  - проекции

ускорения точки на координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  - проекции равнодействующей  $\vec{F}$  на те же оси.

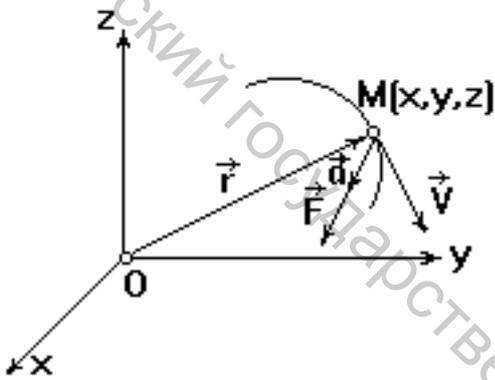


Рис.1.1

Если использовать описание движения точки в естественной форме, то нужно дифференциальное уравнение (1.3) спроектировать на оси естественного трёхгранника.

Получим дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси координат.

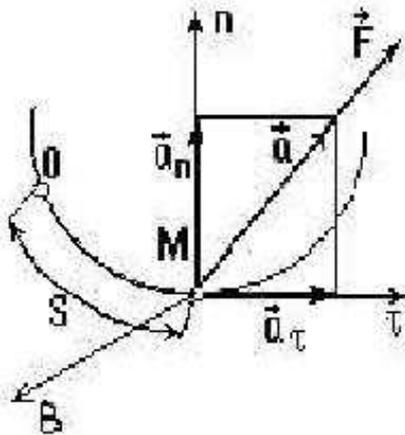


Рис. 1.2

$$\begin{cases} m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau \\ m \frac{V^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_\beta \end{cases} \quad (1.6)$$

### 1.3 Решение первой задачи динамики материальной точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки дают возможность решить основные задачи динамики точки. В первой задаче динамики, когда даны кинематические уравнения движения, решение задачи сводится к дифференцированию этих уравнений: умножив на массу вторую производную от координаты по времени, получим проекцию силы на соответствующую ось. Иначе говоря, если даны уравнения движения материальной точки массы  $m$  в декартовых координатах:  $x=f_1(t)$ ,  $y=f_2(t)$ ,  $z=f_3(t)$ , то проекции  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  силы  $\vec{F}$ , вызывающей это движение, определяется по формулам:

$$F_x = m\ddot{x}, F_y = m\ddot{y}, F_z = m\ddot{z}, \quad (1.7)$$

откуда

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (1.8)$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\vec{F} \wedge x) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\vec{F} \wedge y) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\vec{F} \wedge z) = \frac{F_z}{F}. \quad (1.9)$$

Первую задачу динамики материальной точки рекомендуется решать в следующей последовательности:

1. Выбрать точку, движение которой рассматривается, в текущем (произвольном) положении.
2. Приложить к точке активные силы и, применив принцип освобожденности от связей, изобразить соответствующие силы реакций связей.
3. Выбрать способ задания движения и показать соответствующую систему координат.
4. Определить по заданному закону движения ускорение материальной точки и найти его проекции на выбранные оси координат.
5. Составить дифференциальные уравнения движения точки, соответствующие принятой системе отсчёта.
6. Из системы уравнений, составленных по форме (1.5) или (1.6), определить искомую величину.

*Пример 1.1.* Материальная точка массы  $m$  движется согласно уравнениям  $x=a \cdot \cos kt$ ,  $y=b \cdot \sin kt$ . Определить силу  $\vec{F}$ , вызывающую это движение.

Решение. Проекция силы  $\vec{F}$ , приложенной к материальной точке, определяются по формулам  $F_x = m\ddot{x}$ ,  $F_y = m\ddot{y}$ . В данном случае  $\ddot{x} = -ak^2 \cos kt$ ,  $\ddot{y} = -bk^2 \sin kt$ .

Тогда  $F_x = -mak^2 \cos kt$ ,  $F_y = -mbk^2 \sin kt$ .

Вводя координаты точки, получим

$$F_x = -mk^2 x, F_y = -mk^2 y$$

Модуль силы  $\vec{F}$  равен:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r,$$

где  $r$ -модуль радиуса - вектора движущейся точки

$$\vec{r} = \vec{OM}.$$

Направление силы  $\vec{F}$  определяем с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(\vec{F}, \wedge x) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r};$$

$$\cos(\vec{F}, \wedge y) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

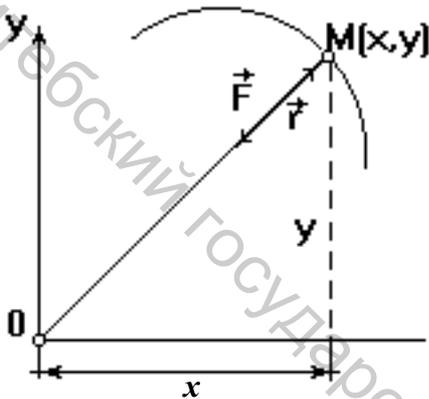


Рис. 1.3

Отсюда можно заключить, что сила  $\vec{F}$  имеет направление, противоположное вектору  $\vec{r}$ . Окончательно,  $\vec{F} = -mk^2 \vec{r}$ .

Данная материальная точка движется под действием силы притяжения к центру O. Эта сила называется центральной.

*Пример 1.2.* Груз массы 0,1 кг, подвешенный на нити длины 30 см в неподвижной

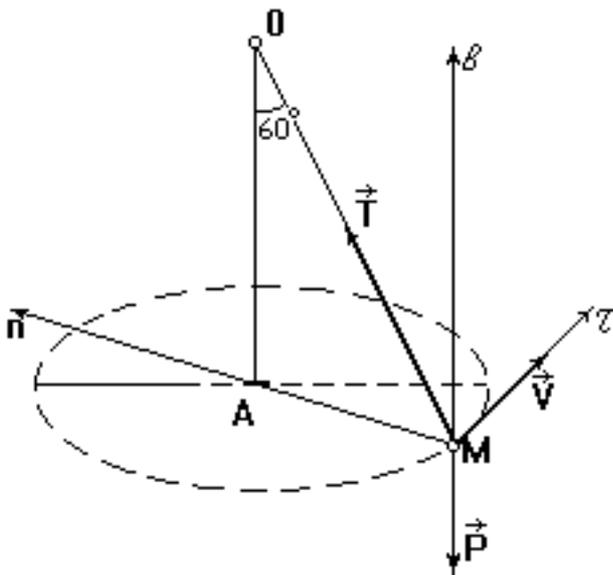


Рис.1.4.

точке O, представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причём нить составляет с вертикалью угол  $60^\circ$ . Определить скорость груза и натяжение нити (рис. 1.4).

#### Решение

К грузу, принимаемому за материальную точку, приложены две силы: вес  $\vec{P}$  груза и реакция нити  $\vec{T}$ . Зная траекторию точки M,

используем естественные оси координат  $M\tau n b$ . Применим дифференциальные уравнения движения материальной точки в естественной форме:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= F_{\tau}, & m \frac{dV}{dt} &= 0 \\ m \frac{V^2}{\rho} &= F_n, & m \frac{V^2}{\rho} &= T \cos 30^\circ \\ 0 &= F_b, & \text{или} & \quad 0 = -P + T \cos 60^\circ \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из первого уравнения системы уравнений (1.10) имеем, что скорость точки постоянна.

Из третьего уравнения получим:

$$T = 2P = 2mg = 1,96H.$$

Учитывая, что радиус кривизны  $\rho = AM = OM \cos 30^\circ$ , найдём скорость точки

$$V = \sqrt{\frac{\rho T \cos 30^\circ}{m}} = 2,1 \text{ м/с}.$$

#### 1.4. Методика решения второй задачи динамики материальной точки

При решении второй задачи динамики по заданной силе  $\vec{F}$ , приложенной к материальной точке массы  $m$ , следует определить закон движения этой точки. Для решения этой задачи следует проинтегрировать систему дифференциальных уравнений движения, соответствующих избранной системе отсчёта.

Решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , значения которых по мере их появления должны определяться из начальных условий. Решение трёх обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка содержит шесть произвольных постоянных интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ .

Начальные условия движения материальной точки определяют положение этой точки и её скорость в некоторый фиксированный момент времени, обычно в начальный, т.е. при  $t=0$ .

Положение точки определяется тремя координатами  $x, y, z$ , а скорость точки - проекциями скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ . Таким образом, начальные условия имеют вид:

$$\text{при } t=0, \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

При решении второй задачи динамики рекомендуется соблюдать следующую последовательность:

1. Изобразить точку, движение которой рассматривается, в положении, соответствующем произвольному моменту времени.

2. Приложить к точке заданные силы и, применив принцип освобожденности от связей, заменить действие связей силами реакций связей.

3. В зависимости от способа задания движения точки выбрать систему координат. Начало отсчёта декартовых осей координат следует совместить с точкой, соответствующей начальному моменту времени, и оси координат направить так, чтобы координаты точки в текущий момент были положительными.

4. Составить дифференциальные уравнения движения материальной точки, выразив в полученных дифференциальных уравнениях проекции сил через те переменные, от которых они зависят.

5. Записать начальные условия движения материальной точки. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения движения, определив произвольные постоянные интегрирования по начальным условиям.

6. Найденные произвольные постоянные подставить в результат интегрирования дифференциальных уравнений движения точки и определить искомые величины.

Силы, приложенные к материальной точке, могут быть:

- 1) Постоянными (например, сила тяжести).
- 2) Силы, зависящие от времени (силы, вызывающие колебательное движение материальной точки).
- 3) Силы, зависящие от перемещения точки (силы упругости пружины).
- 4) Силы, зависящие от скорости движения точки (силы сопротивления среды).

### 1.5. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения материальной точки в случае прямолинейного и криволинейного движения

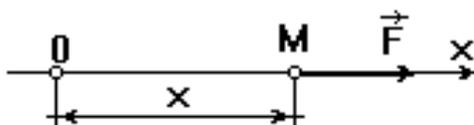


Рис. 1.5.

Материальная точка будет двигаться прямолинейно тогда, когда действующая на неё сила имеет постоянное направление, а скорость точки в начальный момент равна нулю или направлена вдоль силы.

Рассмотрим материальную точку,

движущуюся прямолинейно под действием силы  $\vec{F}$  (рис. 1.5). Положение точки на траектории определяется координатой  $x$ . Основная задача динамики состоит в том, чтобы, зная  $\vec{F}$ , найти закон движения точки, т.е.  $x=f(t)$ .

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x. \quad (1.11)$$

Понизить порядок такого уравнения можно подстановкой  $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$ .

Тогда уравнение (1.11) принимает вид:

$$m \frac{dV}{dt} = F_x. \quad (1.12)$$

Рассмотрим несколько случаев прямолинейного движения материальной точки, в которых можно указать методы интегрирования дифференциальных уравнений движения. Рассмотрим случаи, когда переменная сила зависит только от времени, или от скорости, или от координаты.

При интегрировании дифференциальных уравнений движения необходимо соблюдать следующие правила:

а) если используются неопределенные интегралы, то произвольные постоянные определять по мере их появления;

б) если используются определенные интегралы, в нижние пределы интегрирования следует подставлять начальные значения скорости и перемещения, а в верхние пределы – значение скорости и перемещения, соответствующие произвольному моменту времени.

### 1.5.1. Случай, когда сила зависит от времени

В этом случае дифференциальное уравнение можно представить в виде:

$$m \frac{dV}{dt} = F(t).$$

После разделения переменных получим:

$$dV = \frac{1}{m} F(t) dt.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем зависимости между скоростью и временем

$$\int_{V_0}^V dV = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt, \text{ или}$$

$$V - V_0 = f_1(t), \text{ где } f_1(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt.$$

Получим, что

$$V = V_0 + f_1(t). \quad (1.13)$$

Замечая, что  $V = \frac{dx}{dt}$ , получим второе дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{dt} = V_0 + f_1(t).$$

Разделив переменные, получим:

$$dx = V_0 dt + f_1(t) dt.$$

Интегрируя это уравнение, найдем закон движения материальной точки

$$\int_{x_0}^x dx = V_0 \int_0^t dt + \int_0^t f_1(t) dt, \text{ или} \quad (1.14)$$

$$x = x_0 + V_0 t + f_2(t), \text{ где}$$

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(t) dt.$$

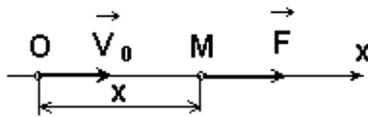


Рис. 1.6

*Пример 1.3.* Материальная точка массы  $m$  совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону  $F = F_0 \cos \omega t$ , где  $F_0$ ,  $\omega$  – постоянные величины. В начальный момент точка имела скорость  $\dot{x}_0 = V_0$ . Найти уравнение движения точки.

#### Решение

Возьмем начало отсчета оси  $x$  в начальном положении груза. Запишем начальные условия движения:

$$\text{при } t=0, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = V_0. \quad (1.15)$$

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось  $x$  имеет вид

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x, \text{ или } m \frac{dV}{dt} = F_0 \cos \omega t. \quad (1.16)$$

Разделив переменные в уравнении (1.16), имеем

$$dV = \frac{F_0}{m} \cos \omega t dt,$$

откуда

$$V = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t + C_1. \quad (1.17)$$

Учитывая, что  $V = \frac{dx}{dt}$ , равенство (1.17) примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t + C_1. \quad (1.18)$$

Умножая обе части равенства (1.18) на  $dt$  и интегрируя, найдем

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t + C_1 t + C_2. \quad (1.19)$$

Полученный результат представляет собой общее решение дифференциального уравнения (1.16). Для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  подставим начальные условия (1.15) в равенства (1.17) и (1.19). Получим:

$$V_0 = C_1, \quad 0 = -\frac{F_0}{m\omega^2} + C_2,$$

отсюда

$$C_1 = V_0, \quad C_2 = \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Окончательно уравнение движения примет вид:

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + V_0 t \quad (1.20)$$

1.5.2. Случай, когда сила зависит от скорости

Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{dV}{dt} = F(V). \quad (1.21)$$

После разделения переменных дифференциальное уравнение примет вид:

$$dt = \frac{m dV}{F(V)}. \quad (1.22)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\int_0^t dt = m \int_{V_0}^V \frac{dV}{F(V)}, \text{ или } t = m f_1(t), \quad (1.23)$$

где  $f_1(t) = \int_{V_0}^V \frac{dV}{F(V)}$ .

Разрешая уравнение (1.23) относительно  $V$ , будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = f_2(t),$$

откуда 
$$x = x_0 + \int_0^t f_2(t) dt. \quad (1.24)$$

*Пример 1.4.* Тело массой  $m=5\text{кг}$  движется по гладкой горизонтальной плоскости прямолинейно. На него действует сила  $F$ , направленная в сторону, противоположную скорости и равная по величине

$$F = 3V^3.$$

В начальный момент координата тела равна  $x_0=4\text{ см}$ , а начальная скорость  $V_0=8\frac{\text{см}}{\text{с}}$ .

Найти закон движения тела.

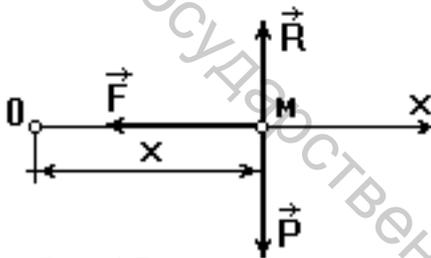


Рис. 1.7

### Решение

Примем данное тело за материальную точку.

Положительное направление оси  $x$  выберем в сторону движения точки. Изобразим точку в произвольном положении на оси  $x$  и укажем силы, действующие на неё. Кроме заданной силы  $F$ , на

точку действует сила тяжести  $\vec{P}$  и сила  $\vec{R}$

нормальной реакции со стороны гладкой поверхности (рис. 1.7). Запишем дифференциальное уравнение движения точки

$$m \frac{dV}{dt} = F(v), \text{ или } 5 \frac{dV}{dt} = -3V^3. \quad (1.25)$$

Разделив переменные, получим:

$$V^{-3} dV = -0,6 dt.$$

Интегрируем это уравнение:

$$\frac{3}{2} V^{\frac{2}{3}} = -0,6t + C_1 \quad (1.26)$$

Для определения постоянной  $C_1$  подставим в (1.26) начальные значения  $V_0=8$  и  $t=0$ .

Имеем, что  $C_1=6$ . Уравнение (1.26) примет вид:

$$\frac{3}{2} V^{\frac{2}{3}} = -0,6t + 6,$$

откуда выразим  $V$ :

$$V = 8(1-0,1t)^{\frac{3}{2}} \quad (1.27)$$

Так как  $V = \frac{dx}{dt}$ , то

$$\frac{dx}{dt} = 8(1-0,1t)^{\frac{3}{2}} \quad (1.28)$$

Разделив переменные в уравнении (1.28) и проинтегрировав, получим:

$$x = -32(1-0,1t)^{\frac{5}{2}} + C_2 \quad (1.29)$$

Для определения  $C_2$  в уравнение (1.29) подставим начальные условия  $x_0=4$  и  $t=0$ . После вычислений получим, что  $C_2=36$ . Итак, закон движения точки имеет вид:

$$x = -32(1-0,1t)^{\frac{5}{2}} + 36. \quad (1.30)$$

### 1.5.3. Случай, когда сила зависит от координаты

В этом случае дифференциальное уравнение имеет вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \quad (1.31)$$

Понизить порядок этого уравнения можно подстановкой

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV \cdot dx}{dt \cdot dx} = \frac{V dV}{dx}, \text{ так как } \frac{dx}{dt} = V. \quad (1.32)$$

Тогда получим следующее дифференциальное уравнение первого порядка:

$$mV \frac{dV}{dx} = F(x).$$

Разделив переменные, получим

$$V dV = \frac{1}{m} \cdot F(x) dx.$$

После интегрирования получаем зависимость скорости от координаты

$$V = f_1(x) + C_1. \quad (1.33)$$

Вводя подстановку  $V = \frac{dx}{dt}$ , получаем уравнение первого порядка с разделяющимися

переменными

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + C_1.$$

Разделяя переменные и интегрируя это уравнение, найдём закон движения точки

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{f_1(x) + C_1} = t + C_2. \quad (1.34)$$

*Пример 1.5.* Материальная точка массой  $m$  движется под действием силы притяжения к неподвижной точке  $O$ , изменяющейся обратно пропорционально кубу расстояния между точками и пропорционально массе точки  $m$ . Коэффициент пропорциональности равен единице. В начальный момент  $t=0$ ,  $x_0=2m$ ,  $V_0 = \frac{1}{2} m/c$ . Определить закон движения точки.

Решение

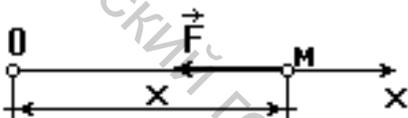


Рис. 1.8

Выбирая за начало координат точку  $O$  для величины силы  $\vec{F}$  при положительном  $x$ , имеем

$$F = \frac{m}{x^3}.$$

Дифференциальное уравнение движение точки с учётом направления силы  $\vec{F}$  имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \text{ или } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{m}{x^3} \quad (1.35)$$

После применения подстановки

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = V \frac{dV}{dx} \text{ получим}$$

$$V \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{x^3}.$$

Разделяя в этом уравнении переменные и интегрируя его, имеем

$$\int_{V_0}^V V dV = - \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^3}, \text{ или}$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x_0^2}.$$

После подстановки в это выражение числовых значений для  $x_0$  и  $V_0$  получаем

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, имеем

$$\int_{x_0}^x x dx = \int_0^t dt, \text{ или } \frac{x^2}{2} - 2 = t.$$

Окончательно закон движения точки имеет вид:

$$x = \sqrt{4 + 2t} \text{ м} \quad (1.36)$$

*Пример 1.6.* Материальная точка, масса которой  $m$ , притягивается к неподвижному центру  $O$  силой, пропорциональной расстоянию до этого центра:  $\vec{F} = -k^2 m \vec{r}$ , где  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки,  $k^2$  - постоянный коэффициент. Определить траекторию точки, если при  $t=0$ ,  $x_0=a$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $y=0$ ,  $\dot{y}_0 = 0$ . Ось  $Oy$  направлена по вертикали вниз (рис.1.9).

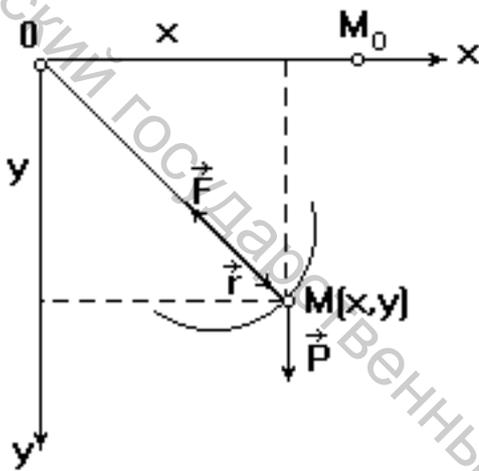


Рис. 1.9

### Решение

За начало осей декартовых координат примем центр  $O$ , к которому притягивается точка. К точке приложены сила тяжести  $\vec{P}$  и сила притяжения  $\vec{F}$ , направленная вдоль радиуса  $\vec{r} = \vec{OM}$  к центру  $O$ . Дифференциальное уравнение движения точки в векторной форме имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}. \quad (1.37)$$

В проекциях на оси  $x$  и  $y$  получим:

$$m\ddot{x} = -k^2 mx, \quad (1.38)$$

$$m\ddot{y} = -k^2 my + mg. \quad (1.39)$$

Уравнение (1.38) приведём к однородному линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (1.40)$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид:  $\lambda^2 + k^2 = 0$ . Решая его, получим  $\lambda_{1,2} = \pm ki$ . Общее решение дифференциального уравнения (1.40) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (1.41)$$

где  $C_1, C_2$  - постоянные интегрирования.

Для определения  $C_1$  и  $C_2$  продифференцируем по времени уравнение (1.41)

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (1.42)$$

Подставив в выражения (1.41) и (1.42) значения  $t = 0$ ,  $x_0 = a$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ , получим

$$a = C_1, 0 = C_2 k, \text{ т.е. } C_1 = a, C_2 = 0.$$

Значения  $C_1$  и  $C_2$  подставим в уравнение (1.41), получим:

$$x = a \cdot \cos kt. \quad (1.43)$$

Уравнение (1.39) приведём к неоднородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\ddot{y} + k^2 y = g. \quad (1.44)$$

Дифференциальное уравнение (1.44) является неоднородным, общее решение которого имеет вид:

$$y = y_1 + y_2,$$

где  $y_1$  - общее решение соответствующего однородного уравнения  $\ddot{y} + k^2 y = 0$ ,  $y_2$  - частное решение неоднородного уравнения (1.44).

Общее решение  $y_1$  представим в виде

$$y_1 = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt. \quad (1.45)$$

Вид частного решения  $y_2$  определяется видом правой части неоднородного уравнения. Поскольку правая часть уравнения (1.44) постоянна, то частное решение  $y_2$  ищем в виде  $y_2 = A$ , где  $A$  - постоянная.

Подставив частное решение в уравнение (1.44), определим  $A$ :  $A = \frac{g}{k^2}$ .

Тогда общее решение уравнения (1.44) примет вид:

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt + \frac{g}{k^2}. \quad (1.46)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_3$  и  $C_4$  найдём производную по времени от общего решения:

$$\dot{y} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt. \quad (1.47)$$

В уравнение (1.46) подставим  $t=0, y=0$ , а в уравнение (1.47) подставим  $t=0, \dot{y}_0 = 0$ .

Получим, что  $C_3 = -\frac{g}{k^2}$ ,  $C_4 = 0$ ,

Подставив полученные значения  $C_3$  и  $C_4$  в уравнение (1.46), получим

$$y = -\frac{g}{k^2} \cos kt + \frac{g}{k^2}.$$

Уравнения движения точки имеют вид:

$$x = a \cdot \cos kt,$$

$$y = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt).$$

Для определения уравнения траектории исключим из уравнений движения время  $t$ .

Имеем, что  $\cos kt = \frac{x}{a}$ . Тогда получим, что траекторией точки является отрезок прямой

$$y = \frac{g}{k^2} - \frac{g}{k^2 a} x, \text{ где } |x| \leq a.$$

*Пример 1.7.* Материальная точка  $M$  массой  $m=0.1$  кг движется под действием силы притяжения к неподвижному центру и пропорциональна расстоянию точки  $M$  до этого центра причём коэффициент пропорциональности  $C=1,6 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ . Движение происходит в среде, сопротивление  $R$  которой пропорционально первой степени скорости, причём коэффициент пропорциональности  $\mu=1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$ . В момент  $t=0$ :  $x_0=-10\text{м}$ ,  $y_0=0$ ,  $V_{ox} = \dot{x}_0 = 0$ ,

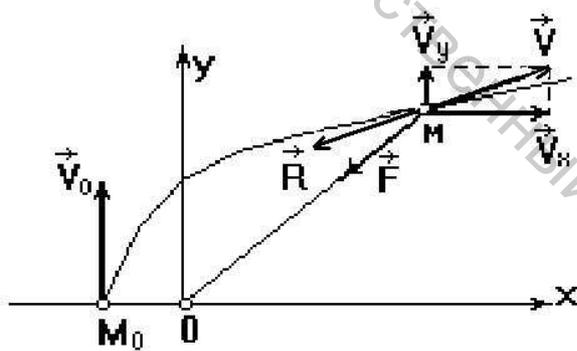


Рис. 1.10

$V_{oy} = \dot{y}_0 = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Найти уравнения движения точки (рис. 1.20).

#### Решение

К материальной точке  $M$  приложены сила  $\vec{F}$  притяжения к неподвижному центру  $O$  и сила сопротивления  $\vec{R}$ , направленная по касательной к траектории в данной точке  $M$  в сторону, противоположную движению. Векторное уравнение движения точки имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}, \text{ где } \vec{F} = -c\vec{r}, \vec{R} = -\mu\vec{V}$$

тогда

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -c\vec{r} - \mu\vec{V}. \quad (1.48)$$

Проектируя равенство (1) на оси  $x$  и  $y$ , имеем

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}, \quad (1.49)$$

$$m\ddot{y} = -cy - \mu\dot{y}. \quad (1.50)$$

Уравнение (1.49) приведём к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = 0, \text{ или } \ddot{x} + 10\dot{x} + 16x = 0.$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее этому дифференциальному уравнению:

$$\lambda^2 + 10\lambda + 16 = 0,$$

откуда  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -8$ .

Следовательно, общим решением этого уравнения будет выражение

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t} \quad (1.51)$$

Для определения  $C_1$  и  $C_2$  вычислим

$$\dot{x} = -2C_1 e^{-2t} - 8C_2 e^{-8t}. \quad (1.52)$$

Подставив начальные условия  $t=0, x_0 = -10\text{м}, \dot{x}_0 = 0$ , получим:

$$-10 = C_1 + C_2, \quad 0 = -2C_1 - 8C_2.$$

Решая эту систему, найдём  $C_1 = -\frac{40}{3}, C_2 = \frac{10}{3}$ . Окончательно получим

$$x = \frac{10}{3} (e^{-8t} - 4e^{-2t}). \quad (1.53)$$

Аналогично, для уравнения (1.50) получим

$$\ddot{y} + \frac{\mu}{m} \dot{y} + \frac{c}{m} y = 0, \text{ или } \ddot{y} + 10\dot{y} + 16y = 0.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_3 e^{-2t} + C_4 e^{-8t}. \quad (1.54)$$

Вычислим

$$\dot{y} = -2C_3 e^{-2t} - 8C_4 e^{-8t}. \quad (1.55)$$

Подставив в уравнение (1.54) и (1.55) начальные условия  $t=0, y_0=0, \dot{y}_0 = 20\text{м/с}$ ,

получим систему уравнений:  $0 = C_3 + C_4, \quad 20 = -2C_3 - 8C_4$ .

Откуда найдём, что  $C_3 = \frac{10}{3}, C_4 = -\frac{10}{3}$ .

Окончательно

$$y = \frac{10}{3} (e^{-2t} - e^{-8t}).$$

Итак, кинематические уравнения движения точки имеют вид:

$$x = \frac{10}{3}(e^{-8t} - 4e^{-2t}),$$

$$y = \frac{10}{3}(e^{-2t} - e^{-8t}).$$

## Глава II

### КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

#### 2.1. Вводные замечания. Виды колебательных движений материальной точки

Среди механических движений особое место занимают движения, которые периодически повторяются. Такие движения называются механическими колебаниями.

Рассмотрим прямолинейные колебания материальной точки, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Такие колебания называются линейными.

Колебательное движение материальной точки происходит при условии, если на точку М, отклонённую от положения равновесия О, действует сила  $\vec{F}$ , стремящаяся вернуть точку в это положение (рис.2.1). Эта сила называется восстанавливающей.

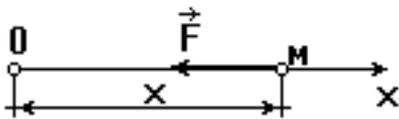


Рис. 2.1

Рассмотрим случай, когда восстанавливающая сила пропорциональна отклонению точки от положения равновесия, т.е.  $F = cx$ , где  $c$  – постоянный коэффициент пропорциональности.

Примером линейной восстанавливающей силы является сила упругости пружины. Модуль этой силы пропорционален удлинению пружины, а сила упругости деформированной пружины всегда направлена к положению равновесия О и пропорциональна отклонению тела от этого положения.

Так как восстанавливающая сила в любом положении направлена к точке О, то её проекция на ось  $x$  имеет всегда знак, противоположный знаку координаты  $x$ :

$$F_x = -cx. \quad (2.1)$$

Кроме восстанавливающей силы на материальную точку могут действовать сила сопротивления  $R(V)$ , зависящая от скорости, и возмущающая сила  $Q(t)$ , являющаяся функцией времени.

Различают четыре основных случая колебательного движения материальной точки:

1) свободные колебания, совершающиеся под действием только восстанавливающей силы;

2) затухающие колебания, совершающиеся под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления движению;

3) вынужденные колебания, совершающиеся под действием восстанавливающей силы и силы периодического характера, называемой возмущающей силой;

4) вынужденные колебания, совершающиеся под действием восстанавливающей силы, возмущающей силы и силы сопротивления движению.

Наиболее просты для исследования те случаи колебательного движения, когда восстанавливающая сила пропорциональна отклонению точки от положения равновесия, а сила сопротивления пропорциональна скорости точки. Соответственно, в проекции на ось  $x$  имеем:

$$F_x = -cx, \quad R_x = -\beta\dot{x}.$$

В таблице 1 дана сводка различных изучаемых в дальнейшем типов линейных колебаний материальной точки массы  $m$ .

## 2.2. Свободные колебания материальной точки

Пусть материальная точка массы  $m$  движется под действием восстанавливающей силы  $\vec{F}$  (рис. 2.2). Если выбрать за ось  $x$  прямолинейную траекторию точки  $M$ , поместив начало координат в точке  $O$ , то дифференциальное уравнение движения точки  $M$  в проекции на ось

$$x \text{ примет вид: } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx, \text{ или } \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

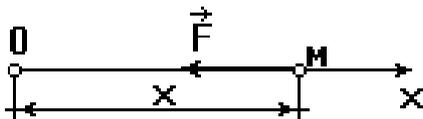


Рис.2.2

$$\text{Обозначив } \frac{c}{m} = k^2, \text{ получим } \ddot{x} + k^2 x = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) называется дифференциальным уравнением свободных колебаний материальной точки, т.е. движение материальной точки под действием восстанавливающей силы описывается линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для интегрирования уравнения (2.2) составим характеристическое уравнение

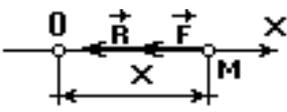
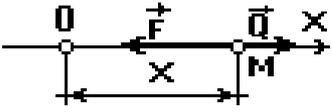
$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

корни которого являются мнимыми ( $\lambda_{1,2} = \pm ik$ ). Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, общее решение уравнения (2.2) имеет вид:

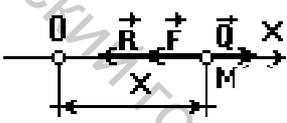
$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt. \quad (2.3)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  - произвольные постоянные, которые определяются по начальным условиям движения.

Таблица 1

Виды колебаний	Дифференциальные уравнения и их характеристики	Решение дифференциальных уравнений
<p style="text-align: center;">1</p> <p><u>Свободные колебания:</u> восстанавливающая сила</p> $F_x = -cx$ 	<p style="text-align: center;">2</p> $\ddot{x} + k^2 x = 0,$ $k^2 = \frac{c}{m}, \lambda^2 + k^2 = 0,$ $\lambda_{1,2} = \pm ik$	<p style="text-align: center;">3</p> $x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt,$ <p style="text-align: center;">или <math>x = a \sin(kt + \alpha)</math></p>
<p><u>Затухающие колебания</u> восстанавливающая сила</p> $F_x = -cx.$ <p>сила сопротивления среды</p> $R_x = -\beta \dot{x}$ 	$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \frac{\beta}{m} = 2n,$ $\frac{c}{m} = k^2; \lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$ <p>а) <math>n &lt; k, \lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}</math>  б) <math>n &gt; k, \lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}</math>  в) <math>n = k, \lambda_1 = \lambda_2 = -n</math></p>	<p>а) <math>x = e^{-nt} (c_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + c_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t),</math> или</p> $x = a e^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha)$ <p>б) <math>x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},</math> или</p> $x = e^{-nt} (c_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t})$ <p>в) <math>x = e^{-nt} (c_1 + c_2 t)</math></p>
<p><u>Вынужденные колебания</u> А) восстанавливающая сила</p> $F_x = -cx, \text{ возмущающая сила}$ $Q_x = H \sin(pt + \delta)$ 	$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, h = \frac{H}{m},$ $\lambda^2 + k^2 = 0, \lambda_{1,2} = \pm ik$ <p>а) <math>k &gt; p,</math>  б) <math>k &lt; p,</math>  в) <math>k = p</math> - резонанс</p>	<p>а) <math>x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)</math> или</p> $x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \times \sin(pt + \delta)$ <p>б) <math>x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{p^2 - k^2} \sin(pt + \delta - \pi)</math></p> <p>в) <math>x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{2k} t \sin\left(pt + \delta - \frac{\pi}{2}\right)</math></p>

Продолжение таблицы 1

1	2	3
<p>Б) восстанавливающая сила  <math>F_x = -cx</math>, сила  сопротивления  среды <math>R_x = -\beta \dot{x}</math>,  возмущающая сила  <math>Q_x = H \sin(pt + \delta)</math></p> 	$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta)$ а) $n < k$ б) $n > k$ в) $n = k$	<p>а) <math>x = e^{-nt} (c_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + c_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \times \sin(pt + \delta - \varepsilon)</math>, или  <math>x = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \times \sin(pt + \delta - \varepsilon)</math></p> <p>б) <math>x = e^{-nt} (c_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \times \sin(pt + \delta - \varepsilon)</math></p> <p>в) <math>x = e^{-nt} (c_1 + c_2 t) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \times \sin(pt + \delta - \varepsilon)</math></p>

Если при  $t=0$ ,  $x = x_0$ ,  $V_x = \dot{x} = \dot{x}_0$ , то  $c_1 = x_0$ ,  $c_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$ . Тогда уравнение движения

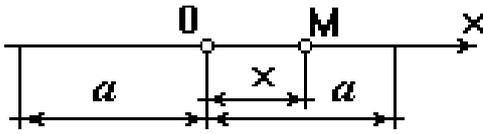
точки запишется так:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \quad (2.4)$$

Общее решение уравнения (2.2) можно представить таким образом:

$$x = a \cdot \sin(kt + \alpha). \quad (2.5)$$

Прямолинейное движение точки, заданное уравнением (2.5), называется гармоническим колебательным движением.



При таком движении точка М отклоняется последовательно в ту и другую сторону от центра колебаний О на величину  $a$ . Из уравнения

(2.5) видно, что наибольшее отклонение колеблющейся точки от положения равновесия, называемой амплитудой колебаний, равно  $a$ . Аргумент  $(kt + \alpha)$  называется фазой колебаний,

а величина  $\alpha$  – начальной фазой. При заданных начальных условиях  $a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}$ ,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{x}_0}{x_0} k.$$

Величина  $k$  называется круговой (или циклической) частотой колебаний, определяемой по формуле

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (2.6)$$

и представляет собой число колебаний материальной точки за  $2\pi$  секунд.

Круговая частота колебаний не зависит от начальных условий движения ( $x_0$  и  $\dot{x}_0$ ). Это свойство называется изохронностью, а колебания изохронными. По признаку изохронности частоту свободных колебаний называют также собственной частотой.

Периодом называется наименьший промежуток времени, по истечении которого движение точки полностью повторяется

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (2.7)$$

Размахом колебаний называется расстояние между крайними положениями точки, равное удвоенной амплитуде.

График свободных колебаний представлен в таблице 2.

При различных соединениях пружин эквивалентную жёсткость и период колебаний можно определить согласно таблице 3.

Таблица 2

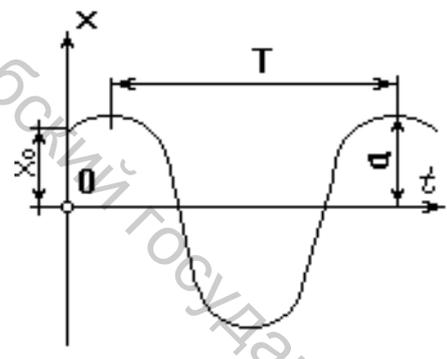
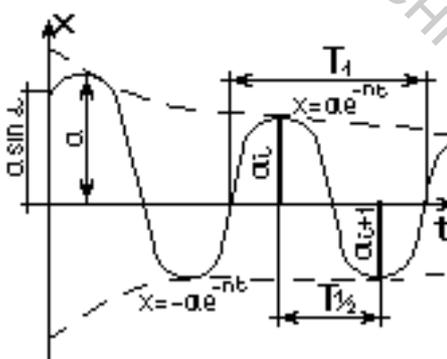
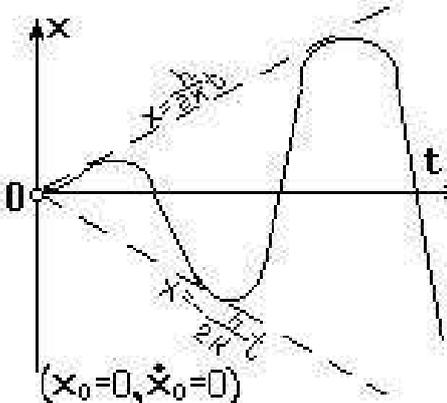
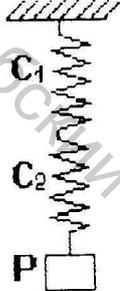
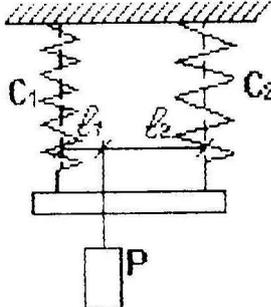
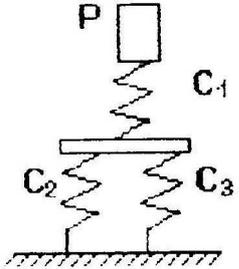
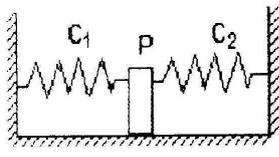
Графики колебаний и основные характеристики	
<p><u>Свободные колебания</u></p> 	$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \quad a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2},$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{x}_0}{x_0} k.$
<p><u>Затухающие колебания</u></p> 	$T_1 = \frac{2}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k_1}, \quad k_1 = \sqrt{k^2 - n^2},$ $D = \frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-\frac{nT_1}{2}}, \quad \delta = \ln e^{-\frac{nT_1}{2}} = -\frac{nT_1}{2},$ $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\left(\frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1}\right)^2}{2}}. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{x}_0}{x_0 + nx_0} k_1.$
<p><u>Вынужденные колебания</u> (сила сопротивления R=0)</p>  <p><math>(x_0=0, \dot{x}_0=0)</math></p>	$A = \frac{h}{ k^2 - p^2 }; \quad A_0 = \frac{H}{c} = \frac{h}{k^2};$ $\mu = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\left 1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right }, \quad \text{При } p=k \quad A = \frac{h}{2k} t.$

Таблица 3

Схемы соединения пружин	Эквивалентная жесткость $C_{np}$	Статическое удлинение	Период колебаний $T$
	$C_{np} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$	$\delta_{cm} = \delta_{cm_1} + \delta_{cm_2} =$ $= P \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{P(C_1 + C_2)}{g C_1 C_2}}$
	$C_{np} = C_1 + C_2$	$\delta_{cm} = \frac{P}{C_1 + C_2}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g(C_1 + C_2)}}$
	$C_{2,3} = C_2 + C_3$ $C_{np} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$	$\delta_{cm} = P \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1(C_2 + C_3)}$	$T = 2\pi \times$ $\times \sqrt{\frac{P(C_1 + C_2 + C_3)}{g C_1(C_2 + C_3)}}$
	$C_{np} = C_1 + C_2$		$T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g(C_1 + C_2)}}$

Решение задачи на колебательное движение материальной точки рекомендуется выполнять в следующем порядке:

- 1) выбрать систему отсчета, приняв начало отсчета в положении статического равновесия материальной точки;
- 2) записать начальные условия движения материальной точки;
- 3) изобразить на рисунке задаваемые силы, приложенные к материальной точке, применив принцип освобождения от связей, добавить реакции связей;
- 4) составить дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на соответствующую ось;
- 5) проинтегрировать дифференциальное уравнение движения, используя начальные условия движения для определения постоянных интегрирования.

При составлении дифференциального уравнения надо изобразить точку в промежуточном положении, соответствующем ее положительной координате, предположив, что точка перемещается в сторону возрастания этой координаты.

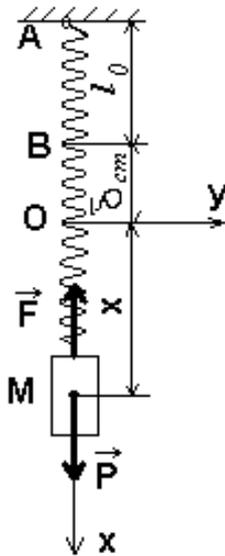


Рис. 2.3

После составления дифференциального уравнения движения следует рассмотреть условие статического равновесия материальной точки, совершающей колебания. Используя это условие, часто удается сократить ряд постоянных слагаемых в правой части дифференциальных уравнений.

*Пример 2.1.* Груз весом  $P=20\text{Н}$  подвешен к концу пружины, находившейся в начальный момент времени в состоянии покоя в недеформированном состоянии. Длина  $l_0 = 20\text{ см}$ . Найти уравнение колебаний груза, если для деформации пружины на 1 см необходимо приложить силу, равную 4Н (рис. 2.3).

Решение. На груз действуют две силы: сила тяжести  $\vec{P} = m\vec{g}$  и сила упругости  $\vec{F}$  пружины. Отметим на рисунке три положения. Точкой В обозначим конец недеформированной пружины, т.е.  $AB = l_0$ , точка М – текущее положение груза при его движении. Примем груз за материальную точку М и направим ось  $x$  по его прямолинейной траектории вертикально вниз. Начало координат О совместим с положением статического

равновесия груза, которому соответствует статическое удлинение пружины  $\delta_{cm}$ . В положении М, определяемой координатой  $x$ , удлинение (деформация) пружины равно  $(\delta_{cm} + x)$ , а модуль силы упругости  $F = c(\delta_{cm} + x)$ . Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось  $x$  имеет вид:

$$m\ddot{x} = P - c(\delta_{cm} + x).$$

Если груз находится в равновесии, то сила тяжести  $P=mg$  уравновешивается силой упругости, которая в положении равновесия равна  $c\delta_{cm}$ , т.е.  $mg = c\delta_{cm}$ .

Принимая во внимание это условие, приведем уравнение к виду:

$$m\ddot{x} = -cx, \text{ или } \ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (2.8)$$

где  $k^2 = \frac{c}{m}$ .

Полученное дифференциальное уравнение совпадает с уравнением (2.2), т.е. груз, подвешенный к пружине, совершает гармонические колебания с частотой  $k$ .

Учитывая, что  $c = \frac{mg}{\delta_{cm}}$ ,  $k^2 = \frac{g}{\delta_{cm}}$ , частота свободных колебаний груза

$$k = \sqrt{\frac{g}{\delta_{cm}}}.$$

Период колебаний груза

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{cm}}{g}}. \quad (2.9)$$

Следовательно, период колебаний груза пропорционален корню квадратному из статического удлинения пружины.

Представим общее решение дифференциального уравнения (2.8) в форме (2.3):

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt. \quad (2.10)$$

По начальным условиям при  $t=0$ ,  $x_0 = -\delta_{cm}$ ,  $V_x = \dot{x} = 0$ .

Уравнение, определяющее скорость точки, имеет вид:

$$\dot{x} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt. \quad (2.11)$$

Подставим начальные условия в уравнения (2.10) и (2.11). Получим, что  $c_1 = -\delta_{cm}$ ,  $c_2 = 0$ .

Уравнение движения груза

$$x = -\delta_{cm} \cos kt.$$

Определим численные значения  $\delta_{cm}$  и  $k$ , причем  $\delta_{cm} = \frac{mg}{c}$ . Из условия задачи следует, что  $c = 4$  Н/см. Тогда  $\delta_{cm} = 20 / 4 = 5$  см,  $k = \sqrt{\frac{g}{\delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{980}{5}} = 14$  с<sup>-1</sup>.

Окончательно, уравнение движения примет вид:

$$x = -5 \cos 14t \text{ (см)}. \quad (2.12)$$

Если выбрать начало координат в неподвижной точке А, то  $F_x = -c(x - l_0)$ , где  $l_0$  – длина пружины в недеформированном состоянии.

Дифференциальное уравнение груза имеет вид:

$$m\ddot{x} = mg - c(x - l_0).$$

Это уравнение приводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + k^2 x = g + k^2 l_0. \quad (2.13)$$

Таким образом, рациональным выбором начала отсчета можно упростить форму дифференциального уравнения движения, и, следовательно, его решение.

Общее решение дифференциального уравнения (2.13) имеет вид  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1$  – общее решение соответствующего однородного уравнения  $\ddot{x} + k^2 x = 0$ ,  $x_2$  – частное решение.

Учитывая, что решение дифференциального уравнения  $\ddot{x} + k^2 x = 0$  найдено выше ( $x_1 = -5 \cos 14t$ ), определим частное решение  $x_2$ . Так как правая часть уравнения (2.13) постоянна, то частное решение  $x_2$  ищем в виде постоянной величины, т.е.  $x_2 = A$ . Подставив частное решение в уравнение (2.13), получим:

$$k^2 A = g + k^2 l_0, \text{ или } A = \frac{g}{k^2} + l_0 = 25 \text{ см.}$$

В этом случае уравнение движения груза будет

$$x = -5 \cos 14t + 25. \quad (2.14)$$

### 2.3. Затухающие колебания материальной точки

Материальная точка, совершающая колебания в реальных условиях, испытывает сопротивление движению (трение, сопротивление среды и т.п.). Это означает, что кроме восстанавливающей силы, направленной к центру колебаний, на точку действует сила сопротивления, всегда направленная в сторону, противоположную направлению движения точки.

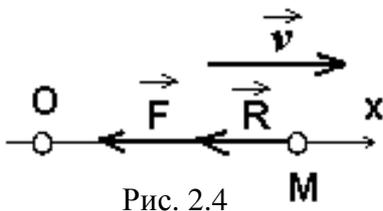


Рис. 2.4

Сила сопротивления при малых скоростях прямо пропорциональна первой степени скорости точки:  $R = \beta V$ , где  $\beta$  – постоянный коэффициент.

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки М под действием восстанавливающей силы  $\vec{F}$  и силы сопротивления  $\vec{R}$ , пропорциональной первой степени скорости (рис. 2.4).

Дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось  $x$  имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx - \beta\dot{x}, \text{ или}$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \quad (2.15)$$

где 
$$\frac{\beta}{m} = 2n, \quad \frac{c}{m} = k^2. \quad (2.16)$$

Величина  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  является частотой свободных колебаний точки. Коэффициент

$n = \frac{\beta}{2m}$  характеризует сопротивление среды.

Уравнение (2.15) является дифференциальным уравнением движения материальной точки под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления, пропорциональной

скорости. Это уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характер движения точки зависит от соотношения величин  $k$  и  $n$ . Различают три вида движения: 1)  $n < k$  – случай малого сопротивления; 2)  $n > k$  – случай большого сопротивления; 3)  $n = k$  – предельный случай.

1) Случай малого сопротивления ( $n < k$ ).

В этом случае корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$  равны  $\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2} = -n \pm ik_1$ , где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ .

Тогда общее решение дифференциального уравнения (2.15) будет иметь вид:

$$x = e^{-nt} (c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t), \quad (2.17)$$

где  $c_1, c_2$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Общее решение дифференциального уравнения (2.15) можно представить в виде

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (2.18)$$

Движение, определяемое уравнением (2.18), имеет колебательный характер, так как координата  $x$  периодически изменяет свой знак при изменении знака входящего в уравнение синуса. Множитель  $e^{-nt}$  указывает на то, что амплитуда колебаний с течением времени уменьшается.

Колебания этого вида называются затухающими.

Величины  $a$  и  $\alpha$  как постоянные интегрирования определяются по начальным условиям задачи. При  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k_1^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k_1}{\dot{x}_0 + nx_0}, \quad (2.19)$$

где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$  – частота затухающих колебаний.

График затухающих колебаний представлен в таблице 2.

Период затухающих колебаний  $T_1$  представляет собой промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки в одном направлении через положение равновесия:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (2.20)$$

Так как при отсутствии сопротивления  $T = \frac{2\pi}{k}$ , то

$$T_1 = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} \quad (2.21)$$

Формула (2.21) указывает на то, что сила сопротивления, пропорциональная скорости, увеличивает период колебаний.

Амплитудой затухающих колебаний называют наибольшее отклонение точки в ту или другую сторону от положения равновесия в течение каждого колебания.

Амплитуда колебаний убывает с каждым полупериодом по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой равен

$$q = \frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-n \frac{T_1}{2}}.$$

Величина  $D = e^{-n \frac{T_1}{2}}$  называется декрементом колебаний.

Для характеристики быстроты убывания амплитуды удобнее пользоваться натуральным логарифмом декремента

$$\delta = \ln e^{-n \frac{T_1}{2}} = -\frac{nT_1}{2}, \quad (2.22)$$

называемого логарифмическим декрементом затухающих колебаний материальной точки.

2) Случай большого сопротивления ( $n > k$ ), т.е. когда сопротивление велико по сравнению с восстанавливающей силой. В этом случае корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$  равны  $\lambda_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}$ ,  $\lambda_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}$ .

Общее решение уравнения (2.15), описывающего закон движения точки, при  $n > k$  имеет вид:

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.23)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – постоянные интегрирования.

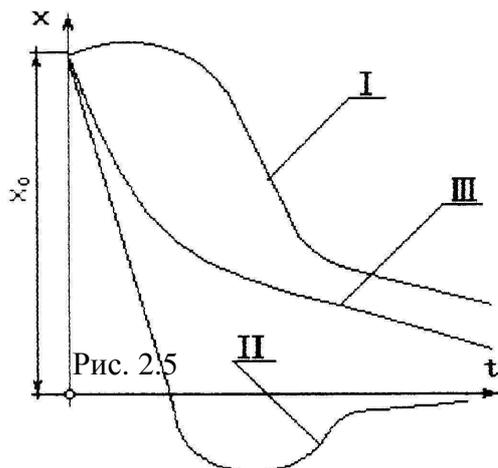
При заданных начальных условиях движения: при  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$ , постоянные интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  равны:

$$c_1 = \frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Тогда уравнение (2.23) можно представить следующим образом:

$$x = \frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}. \quad (2.24)$$

Так как  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отрицательны, то функции  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$  со временем монотонно убывают, и точка под действием восстанавливающей силы будет постепенно приближаться к равновесному положению ( $x \rightarrow 0$ ).



В зависимости от начальных условий на рис. 2.5 представлены графики движения точки.

Кривая I соответствует начальным условиям  $x_0 > 0$ ,  $\dot{x}_0 > 0$ ; кривая II -  $x_0 > 0$ ,  $\dot{x}_0 < 0$ , но  $|\dot{x}_0| > |\lambda_2| x_0$ ; кривая III -  $x_0 > 0$ ,  $\dot{x}_0 \leq 0$ , но  $|\dot{x}_0| < |\lambda_2| x_0$ . Во всех трех случаях движение быстро затухает.

### 3) Предельный (граничный) случай ( $n=k$ ).

В этом случае корни характеристического уравнения будут вещественными и кратными:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n.$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.15) имеет вид:

$$x = e^{-nt} (c_1 + c_2 t),$$

где  $c_1, c_2$  – постоянные интегрирования.

Пусть начальные условия движения будут:  $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$ . Тогда  $c_1 = x_0, c_2 = \dot{x}_0 + nx_0$ .

При заданных начальных условиях уравнение движения запишется в виде:

$$x = e^{-nt} [x_0 + (\dot{x}_0 + nx_0)t]. \quad (2.25)$$

Характер затухания зависит от начальных условий движения. При  $x_0 \geq 0, \dot{x}_0 > 0$  движение материальной точки соответствует кривой I. При  $x_0 > 0, \dot{x}_0 < 0$  (причем  $|\dot{x}_0| > nx_0$ ) движение точки соответствует кривой II. При  $x_0 > 0, \dot{x}_0 \leq 0$  (причем  $|\dot{x}_0| < nx_0$ ) движение материальной точки соответствует кривой III (рис. 2.5).

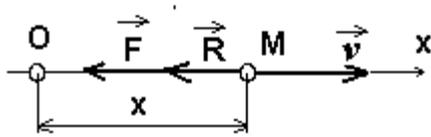


Рис. 2.6

*Пример 2.2.* Материальная точка совершает прямолинейные колебания в сопротивляющейся среде под действием восстанавливающей силы. Сила сопротивления среды пропорциональна первой степени скорости. В начальный момент  $x_0 = 0, V_0 = 2 \text{ м/с}$ . Период затухающих колебаний  $T_1 = 4 \text{ с}$ , декремент затухания  $D = \frac{1}{4}$ . Определить закон движения точки (рис. 2.6).

2.6).

Решение. Выберем начало координат в неподвижном центре O, ось x направим вдоль движения точки. Проекция восстанавливающей силы на ось x  $F_x = -cx$ , проекция силы сопротивления  $R_x = -\beta \dot{x}$ , где  $c$  и  $\beta$  – постоянные коэффициенты. Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx - \beta\dot{x}, \text{ или } \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \text{ где } \frac{\beta}{m} = 2n, \frac{c}{m} = k^2.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$x = a e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha).$$

По формулам (2.19) определим значения  $a$  и  $\alpha$ :

$$a = \frac{\dot{x}_0}{k_1} = \frac{2}{k_1}; \quad \alpha = 0.$$

Тогда

$$x = \frac{2}{k_1} e^{-nt} \sin k_1 t.$$

Для определения постоянных  $k_1$  и  $n$  используем формулы периода затухающих колебаний и декремента затухания:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 4, \quad D = e^{-\frac{nT_1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Отсюда  $k_1 = \frac{\pi}{2}c^{-1}$ ,  $e^{-2n} = \frac{1}{4}$ , или  $n = \ln 2$ .

Получаем, что уравнение движения точки принимает вид:

$$x = \frac{4}{\pi} e^{-t \ln 2} \sin \frac{\pi}{2} t.$$

Учитывая, что  $e^{-t \ln 2} = 2^{-t}$ , окончательно получим  $x = \frac{2^{2-t}}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} t$ .

## 2.4. Вынужденные колебания материальной точки

### 2.4.1. Уравнение вынужденных колебаний

Вынужденные колебания совершает материальная точка, на которую, кроме восстанавливающей силы, действует сила, периодически изменяющаяся во времени, называемая возмущающей силой.

Рассмотрим простейший, но практически весьма важный случай, когда возмущающая сила  $\vec{Q}$  изменяется по гармоническому закону, т.е. проекция силы на ось  $x$ , направленную по траектории точки, равна

$$Q_x = H \sin(pt + \delta) \quad (2.27)$$

где  $H$  - амплитуда возмущающей силы;  $p$  - частота возмущающей силы;  $\delta$  - начальная фаза.

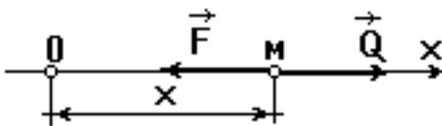


Рис. 2.7

Пусть материальная точка движется под действием восстанавливающей силы  $\vec{F}$  и возмущающей силы  $\vec{Q}$ , изменяющейся по гармоническому закону. Направим ось  $x$  по прямолинейной траектории точки  $M$ , а начало координат  $O$  совместим с положением покоя точки

$M$ , соответствующее недеформированной пружине. Тогда в проекции на ось  $x$  дифференциальное уравнение движения точки имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx + H \sin(pt + \delta), \quad \text{или}$$

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta). \quad (2.28)$$

где  $\frac{c}{m} = k^2$ ,  $\frac{H}{m} = h$ .

Уравнение (2.28) представляет собой дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки при отсутствии сопротивления. Это уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого складывается из общего решения  $x_1$  соответствующего однородного уравнения  $\ddot{x} + k^2 x = 0$  и частного решения  $x_2$  данного неоднородного уравнения (2.28), т.е.

$$x = x_1 + x_2.$$

Однородное уравнение  $\ddot{x} + k^2 x = 0$  имеет общее решение либо в виде

$$x_1 = a \sin(kt + \alpha), \text{ либо}$$

$$x_1 = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt.$$

В соответствии с видом функции  $f(t)$  правой части уравнения (2.28) частное решение при условии, что  $p \neq k$ , будем искать в виде:

$$x_2 = A \sin(pt + \delta),$$

где  $A$  - неизвестная постоянная.

Для определения значения  $A$  достаточно частное решение  $x_2$  подставить в уравнение

(2.28). Получим, что  $A = \frac{h}{k^2 - p^2}$ .

Таким образом, общее решение уравнения (2.28) примет вид

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta), \quad (2.29)$$

либо

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \quad (2.30)$$

Постоянные  $a$  и  $\alpha$ ,  $c_1$  и  $c_2$  зависят от начальных условий.

Уравнение (2.29) показывает, что точка  $M$  совершает сложное колебательное движение, складывающееся из двух гармонических колебаний.

Первый член правой части уравнения (2.29) определяет свободные колебания, а второй - вынужденные колебания точки.

Таким образом, при одновременном действии восстанавливающей и возмущающей сил материальная точка совершает сложное колебательное движение, представляющее собой результат наложения свободных и вынужденных колебаний точки.

Вынужденные колебания не зависят от начальных условий и определяются уравнением

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \quad (2.31)$$

Частота  $p$  и период  $T = \frac{2\pi}{p}$  вынужденных колебаний совпадают с частотой и периодом возмущающей силы.

Вынужденные колебания, частота  $p$  которых меньше частоты  $k$  свободных колебаний точки, называются вынужденными колебаниями малой частоты ( $p < k$ ).

Вынужденные колебания, частота  $p$  которых больше частоты  $k$  свободных колебаний, называются вынужденными колебаниями большой частоты ( $p > k$ ).

#### 2.4.2. Фаза и амплитуда вынужденных колебаний

Уравнение вынужденных колебаний малой частоты ( $p < k$ ) имеет вид:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

В этом случае фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой возмущающей силы, амплитуда вынужденных колебаний определяется формулой

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

В случае вынужденных колебаний большой частоты ( $p > k$ ) уравнению (2.31) придают такой вид, чтобы коэффициент при синусе был положительным, т.е.

$$x_2 = \frac{h}{p^2 - k^2} \sin(pt + \delta - \pi).$$

При  $p > k$  вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на  $\pi$ , т.е. фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы противоположны.

В этом случае амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{h}{p^2 - k^2}.$$

Амплитуда чисто вынужденных колебаний равна

$$A = \frac{h}{|k^2 - p^2|}.$$

Для анализа зависимости  $A$  от отношения частот  $\frac{p}{k}$  введём статическое отклонение

$A_0 = \frac{H}{c} = \frac{h}{k^2}$ , характеризующее отклонение точки от положения равновесия под действием силы, равной максимальному значению возмущающей силы.

Коэффициентом динамичности называется отношение амплитуды вынужденных колебаний к величине статического отклонения:

$$\eta = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|}.$$

Коэффициентом расстройки  $z$  называется отношение круговой частоты  $p$  вынужденных колебаний материальной точки к круговой частоте  $k$  её свободных колебаний, т.е.  $z = \frac{p}{k}$ .

Коэффициент динамичности  $\eta$  связан с коэффициентом расстройки  $z$  зависимостью

$$\eta = \frac{1}{|1 - z^2|}.$$

График этой функции изображён на рис. 2.8.

При  $0 < z < 1$ , т.е., когда  $p < k$ , происходят колебания малой частоты. В случае  $z > 1$ , т.е. при  $p > k$  происходят вынужденные колебания большой частоты.

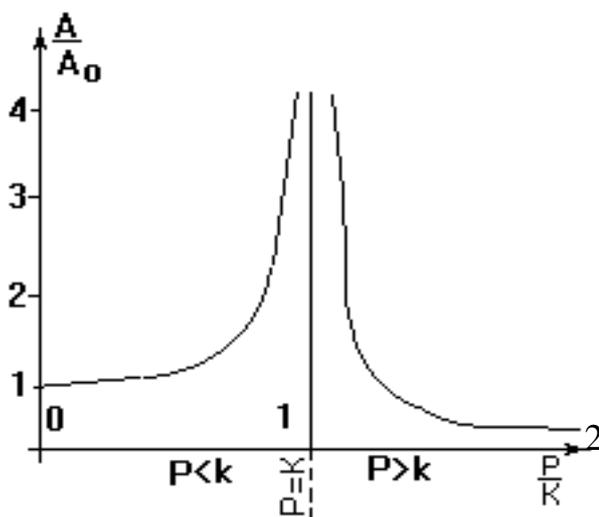


Рис. 2.8

Из графика видно, что при  $\frac{p}{k} \rightarrow 1$  коэффициент динамичности резко возрастает. При частоте  $p$ , близкой к собственной частоте  $k$ , благодаря наложению колебаний наступает своеобразное явление, называемое биением. На рис. 2.9 представлен график этого движения (при  $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ ).

Показанные здесь биения

представляют собой колебания, происходящие с частотой  $p$  возмущающей силы, причём амплитуда этих колебаний медленно меняется, следуя также периодическому закону.

При  $p=k$ , т.е. при равенстве круговых частот свободных и вынужденных колебаний, имеет место явление, называемое резонансом.

В этом случае частное решение  $x_2$  дифференциального уравнения (2.28) имеет вид

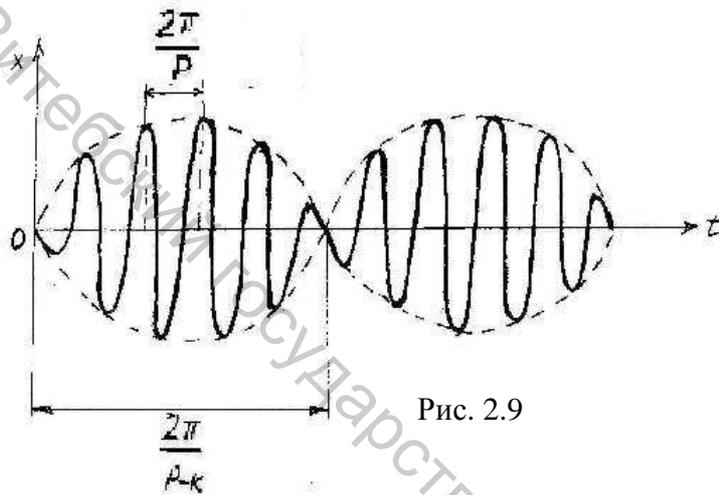


Рис. 2.9

$$x_2 = -\frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta), \text{ или}$$

$$x_2 = \frac{h}{2k} t \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right).$$

При резонансе переменная амплитуда вынужденных колебаний

$A = \frac{h}{2k} t$  растёт прямо пропорционально времени.

График вынужденных колебаний при  $p=k$  ( $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ ) представлен в таблице 2.

Закончив исследования уравнения (2.31), определяющего вынужденные колебания материальной точки, рассмотрим уравнение (2.30), которое определяет результирующее движение точки под действием возмущающей и восстанавливающей сил:

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

При  $t = 0, x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$  постоянные интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  выражаются формулами:

$$c_1 = x_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \delta, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \frac{p}{k} \cos \delta.$$

Окончательно уравнение движения материальной точки имеет вид:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{h}{k^2 - p^2} \left( \sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (2.32)$$

Согласно уравнению (2.32), движение точки М можно рассматривать как результат сложения трёх движений:

1) слагаемые  $x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$  определяют свободные колебания, которые совершала бы материальная точка при отсутствии возмущающей силы;

2) слагаемое  $-\frac{h}{k^2 - p^2} \left( \sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right)$  определяет колебания, имеющие тоже частоту  $k$ , но вызванные возмущающей силой  $Q$ .

3) слагаемое  $\frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$  определяет вынужденные колебания, частота которых равна частоте возмущающей силы.

*Пример 2.3.* Груз массы  $m=200\text{г}$ , подвешенный к пружине, коэффициент жёсткости которой  $9,8 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ , находится под

действием силы  $Q=20 \cdot \sin 50t$ . В начальный момент  $x_0 = 2\text{см}$ ,  $\dot{x}_0 = 10 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ . Начало координат выбрано в положении статического равновесия. Найти уравнение движения груза (рис. 2.10).

Решение. Направим ось  $x$  по траектории движения груза М, приняв его за материальную точку. Начало координат  $O$  совместим с положением покоя груза, соответствующее статическому удлинению пружины  $\delta_{\text{СТ}}$ . В положении М, определяемом координатой  $x$ , деформация пружины равна  $(\delta_{\text{СТ}} + x)$ , а модуль силы упругости  $F=c(\delta_{\text{СТ}} + x)$ . На груз действуют сила тяжести  $\vec{P}$ , возмущающая сила  $\vec{Q}$ , направленная в сторону движения груза, и сила упругости пружины  $\vec{F}$ . Дифференциальное уравнение движения груза вдоль оси  $x$  имеет вид  $m\ddot{x} = P - c(\delta_{\text{СТ}} + x) + Q$ , или, учитывая, что  $mg = c\delta_{\text{СТ}}$ , получим  $m\ddot{x} = -cx + 20 \sin 50t$ .

Это уравнение примет вид:

$$\ddot{x} + kx^2 = h \sin 50t, \quad (2.33)$$

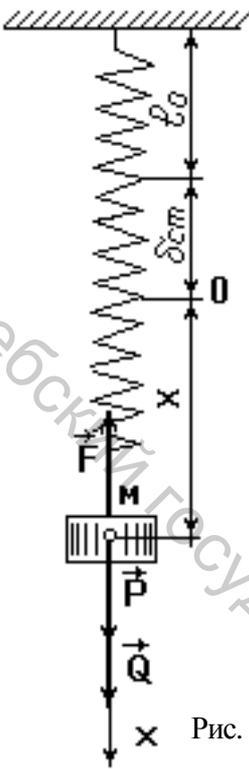


Рис. 2.10

где  $\frac{c}{m} = k^2$ ,  $\frac{20}{m} = h$ ,  $p = 50c^{-1}$  - частота возмущающей силы. В данном случае

$$K = 70c^{-1}, h = 10000 \text{ см} \cdot c^{-2}.$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.33) запишем по формуле (2.30).

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (2.34)$$

Для определения постоянных  $c_1$  и  $c_2$  вычислим

$$\dot{x} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt. \quad (2.35)$$

В уравнение (2.34) подставим  $t=0$ ,  $x_0=2$  см, а в уравнение (2.35) подставим

$$t = 0, \dot{x}_0 = 10 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \text{ Получим, что } c_1 = 2 \text{ см, } c_2 = -2,83 \text{ см.}$$

$$\text{Величина } \frac{h}{k^2 - p^2} = 4,17 \text{ см.}$$

Окончательно, уравнение движения груза имеет вид:

$$x = 2 \cos 70t - 2,83 \sin 70t + 4,17 \sin 50t.$$

## 2.5. Вынужденные колебания материальной точки при наличии сопротивления

Рассмотрим движение материальной точки под действием восстанавливающей силы  $\vec{F}$ , возмущающей силы  $\vec{Q}$ , изменяющейся по гармоническому закону, т.е.  $Q = H \sin(pt + \delta)$ , и силы сопротивления  $\vec{R}$ , пропорциональной скорости, причём  $\vec{R} = -\beta \vec{V}$ , где  $\beta$  - постоянный коэффициент.

Направим ось  $x$  вдоль прямолинейной траектории точки  $M$ , поместив в начало координат  $O$  в положение равновесия точки, соответствующее недеформированной пружине.

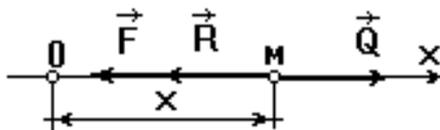


Рис. 2.11

Дифференциальное уравнение движения точки под действием сил  $\vec{F}$ ,  $\vec{Q}$ ,  $\vec{R}$  вдоль оси  $x$  имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx - \beta\dot{x} + H \sin(pt + \delta), \text{ или}$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta), \quad (2.36)$$

$$\text{где } 2n = \frac{\beta}{m}, k^2 = \frac{c}{m}, h = \frac{H}{m}.$$

Уравнение (2.36) является дифференциальным уравнением вынужденных колебаний материальной точки при наличии сопротивления движению, пропорционального скорости. Это уравнение представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого состоит из двух решений: общего решения  $x_1$  соответствующего однородного уравнения  $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$  и частного решения  $x_2$  данного неоднородного уравнения (2.36), т.е.  $x = x_1 + x_2$ .

Решение  $x_1$  в зависимости от соотношений  $n < k$ ,  $n > k$ ,  $n = k$  было получено в параграфе 2.3.

Частное решение  $x_2$ , определяющее вынужденные колебания, будем искать в виде

$$x_2 = A_c \sin(pt + \delta - \varepsilon),$$

где

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (2.37)$$

В частном случае, при  $n < k$ , общее решение дифференциального уравнения (2.36) можно представить в следующем виде (учитывая, что величина  $\varepsilon$  найдена):

$$x = e^{-nt} (c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \varepsilon), \quad (2.38)$$

или

$$x = a e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \varepsilon), \quad (2.39)$$

где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ .

Как видно из уравнения (2.39), движение материальной точки в рассматриваемом случае представляет собой наложение собственно вынужденных колебаний на затухающие колебания при  $n < k$ , или наложение вынужденных колебаний на аperiодическое движение при  $n \geq k$ . Наличие множителя  $e^{-nt}$  в членах, соответствующих затухающим колебаниям, обуславливает быстрое затухание этих движений. Поэтому при установившемся режиме, т.е. через достаточно большой промежуток времени после начала движения, результирующее движение точки практически состоит только из вынужденных колебаний, определяемых уравнением

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \varepsilon). \quad (2.40)$$

Частота  $p$  и период  $T = \frac{2\pi}{P}$  вынужденных колебаний точки при наличии сопротивления равны частоте и периоду изменения возмущающей силы, т.е. сопротивление не влияет на частоту и период вынужденных колебаний.

Фаза вынужденных колебаний точки при наличии сопротивления ( $pt + \delta - \varepsilon$ ) отстаёт от фазы возмущающей силы ( $pt + \delta$ ) на величину  $\varepsilon$ , называемую сдвигом фазы и определяемую формулой (2.37).

Величина  $\varepsilon$  зависит от отношения  $\frac{P}{k}$ , характеризующего возмущающую силу, и от отношения  $\frac{n}{k}$ , характеризующего сопротивление среды.

Динамический эффект, вызываемый возмущающей силой, можно охарактеризовать коэффициентом динамичности

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}}$$

*Пример 2.4.* Тело массой 2 кг, прикрепленное пружиной к неподвижной точке А, движется по гладкой наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, под действием возмущающей силы  $Q=12\sin 4t$  и силы сопротивления, пропорциональной скорости  $\vec{R} = -10\vec{V}$  ( $Q, R$  в ньютонах). Коэффициент жёсткости пружины  $c = 200 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ . В начальный момент тело находилось в покое в положении статического равновесия. Найти уравнение движения тела (рис. 2.12).

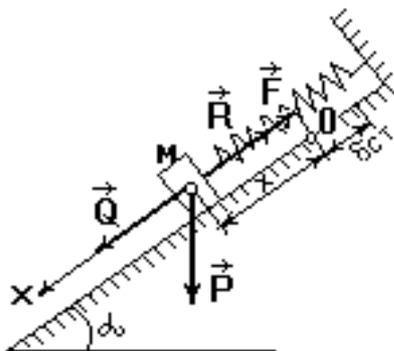


Рис. 2.12

### Решение

Направим ось  $x$  по траектории движения тела  $M$ , приняв его за материальную точку. Начало координат  $O$  совместим с положением статического равновесия тела. При этом сила упругости пружины  $F_{\text{CT}} = c\delta_{\text{CT}}$ . В положении статического равновесия  $P \sin \alpha = c\delta_{\text{CT}}$ . В положении  $M$ , определяемом координатой  $x$ , деформация пружины равна  $(\delta_{\text{CT}} + x)$ , а модуль силы упругости  $F = c(\delta_{\text{CT}} + x)$ . На груз действуют сила

тяжести  $\vec{P}$ , возмущающая сила  $\vec{Q}$ , направленная в сторону движения тела, сила упругости пружины  $\vec{F}$  и сила сопротивления  $\vec{R}$ .

Дифференциальное уравнение движения тела вдоль оси  $x$  имеет вид:

$$m\ddot{x} = P \sin \alpha - c(\delta_{сТ} + x) + Q - R, \text{ или,}$$

учитывая условие статического равновесия,

$$m\ddot{x} = -cx - 10\dot{x} + 12 \sin 4t.$$

Это уравнение представим в виде:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin pt. \quad (2.41)$$

где  $\frac{10}{m} = 2n, \frac{c}{m} = k^2, h = \frac{12}{m}, p = 4c^{-1}$ .

Используя данные задачи, имеем  $n = 2,5c^{-1}, k = 10c^{-1}, h = 600 \text{ см} \cdot c^{-2}$ .

Общее решение уравнения (2.41) ищем в виде ( $n < k$ )

$$x = e^{-nt} (c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t) + A \sin(pt - \varepsilon), \quad (2.42)$$

где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = 9,68c^{-1}$ .

Величины  $A_c$  и  $\varepsilon$  определим по формулам (2.37).

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4n^2 p^2}} = \frac{600}{\sqrt{(100 - 16)^2 + 4 \cdot 6,25 \cdot 16}} = 6,95 \text{ см,}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} = 0,238, \text{ откуда } \varepsilon = 13^\circ 20'.$$

Для определения постоянных интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  продифференцируем равенство (2.42) по времени:

$$\dot{x} = -n \cdot e^{-nt} (c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t) + e^{-nt} (-c_1 k_1 \sin k_1 t + c_2 k_1 \cos k_1 t) + A_c p \cdot \cos(pt - \varepsilon) \quad (2.43)$$

Подставим начальные условия  $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$  в уравнения (2.42) и (2.43).

Получим:

$$\begin{cases} 0 = c_1 - A_c \sin \varepsilon \\ 0 = -n c_1 + c_2 k_1 + A_c p \cdot \cos \varepsilon \end{cases}$$

Из этих уравнений находим  $c_1$  и  $c_2$ :

$$c_1 = A_c \cdot \sin \varepsilon = 1,6 \text{ см},$$

$$c_2 = \frac{A_c \cdot n \sin \varepsilon - A_c \cdot p \cos \varepsilon}{k_1} = -2,31 \text{ см}.$$

Окончательно уравнение движения имеет вид:

$$x = e^{-2,5t} (1,6 \cos 9,68t - 2,31 \sin 9,68t) + 6,95 \sin \left( 4t - 13^\circ 20' \right) \text{ см}.$$

## Глава III

### ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

#### 3.1. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки

Законы классической механики справедливы для движения материальной точки относительно инерциальной системы отсчёта. Изучим движение материальной точки относительно неинерциальной системы отсчёта.

Пусть материальная точка массы  $m$  движется относительно подвижной системы  $Oxyz$ , которая, в свою очередь, движется по отношению к неподвижной системе  $O_1x_1y_1z_1$ , которую считаем инерциальной (рис.3.1). Если на точку действует равнодействующая всех активных сил и реакций связей, то в инерциальной системе отсчёта имеем

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k. \quad (3.1)$$

Абсолютное ускорение по теореме

$$\text{Кориолиса можно записать: } \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k.$$

Тогда равенство (3.1) примет вид:

$$m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k) = \sum \vec{F}_k, \text{ или}$$

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_k).$$

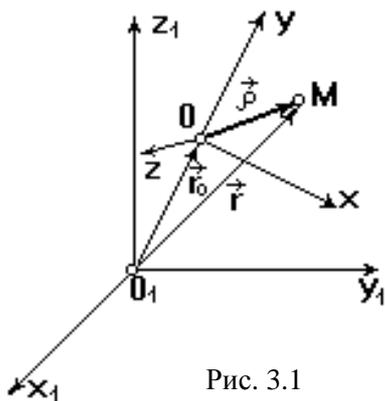


Рис. 3.1

Векторы  $\begin{pmatrix} \vec{a}_e \\ -m\vec{a}_e \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \vec{a}_k \\ -m\vec{a}_k \end{pmatrix}$  представляют собой силы инерции, которые равны по

модулю произведению массы материальной точки на соответствующие ускорения и направлены в стороны, противоположные этим ускорениям.

$\vec{\Phi}_e = -ma_e$  - переносная сила инерции,  $\vec{\Phi}_k = -ma_k$  - кориолисова сила инерции.

Окончательно имеем

$$ma_r = \sum \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) представляет собой основное уравнение динамики относительного движения материальной точки.

Это уравнение показывает, что в случае непоступательного переносного движения относительное движение материальной точки можно рассматривать как абсолютное, если к действующим на точку силам присоединить переносную и кориолисову силы инерции.

Кориолисова сила инерции определяется векторным выражением

$$\vec{\Phi}_k = -ma_k = -2m \left( \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r \right) = 2m \left( \vec{V}_r \times \vec{\omega}_e \right).$$

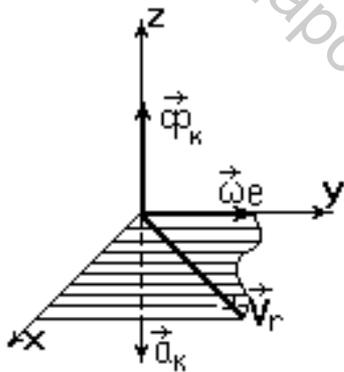


Рис. 3.2

Направление вектора  $\vec{\Phi}_k$  видно из рис. 3.2.

Проектируя векторное уравнение (3.2) на подвижные оси x, y, z, получим дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{kx},$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{ky},$$

$$m\ddot{z} = \sum F_{kz} + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}.$$

### 3.2. Частные случаи переносного движения

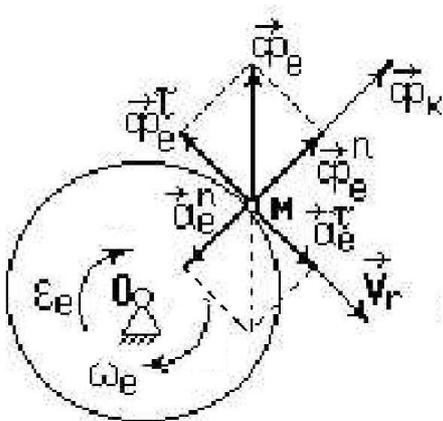


Рис. 3.3

Рассмотрим частные случаи относительного движения материальной точки в зависимости от вида переносного движения.

1. Переносное движение - неравномерное вращение вокруг неподвижной оси.

В этом случае переносная сила инерции равна геометрической сумме центробежной  $\vec{\Phi}_e^n$  и

вращательной  $\vec{\Phi}_e^\tau$  сил инерции:  $\vec{\Phi}_e = \vec{\Phi}_e^n + \vec{\Phi}_e^\tau$ ,

$$\text{где } \vec{\Phi}_e^n = -ma_e^n, \quad \vec{\Phi}_e^\tau = -ma_e^\tau.$$

Переносная центробежная сила инерции по модулю равна

$$\Phi_e^n = m\omega^2 \cdot OM.$$

Модуль вращательной силы инерции

$$\Phi_e^\tau = m \left| \varepsilon_2 \right| \cdot OM.$$

Модуль кориолисовой силы инерции

$$\Phi_k = 2m \left| \omega_e \right| \cdot |v_r| \cdot \sin(\bar{\omega}_e \wedge \bar{v}_r).$$

Тогда уравнение относительного движения материальной точки в векторной форме примет вид:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e^n + \vec{\Phi}_e^\tau + \vec{\Phi}_k. \quad (3.3)$$

2. Переносное движение - равномерное вращение вокруг неподвижной оси.

В этом случае  $\varepsilon_e = 0$  и  $\Phi_e^\tau = 0$ . Основное уравнение относительного движения точки имеет вид:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e^n + \vec{\Phi}_k. \quad (3.4)$$

3. Переносное движение - поступательное неравномерное криволинейное движение.

В этом случае  $\omega_e = 0$  и  $\Phi_k = 0$ . Переносная сила инерции  $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$ , которая в случае неравномерного поступательного криволинейного движения равна векторной сумме центробежной и вращательной сил инерции т.е.  $\vec{\Phi}_e = \vec{\Phi}_e^n + \vec{\Phi}_e^\tau$ , где

$$\Phi_e^n = \frac{mV_e^2}{\rho}, \quad \Phi_e^\tau = m \left| \frac{dV_e}{dt} \right|.$$

Тогда уравнение относительного движения принимает вид:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e. \quad (3.5)$$

4. Переносное движение - равномерное и прямолинейное. В этом случае  $\vec{\Phi}_e$  и  $\vec{\Phi}_k$  равны нулю, и уравнение относительного движения точки тождественно её уравнению абсолютного движения.

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k. \quad (3.6)$$

Задачи динамики относительного движения материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1. Разложить “абсолютное” движение точки на относительное и переносное; выбрать неподвижную систему отсчёта и подвижную систему отсчёта, связанную с подвижной средой, совершающей переносное движение.

2. Изобразить материальную точку в текущий момент времени.

3. Изобразить на рисунке активные силы и силы реакций связей, приложенные к материальной точке.

4. Определить ускорение  $\vec{a}_e$  материальной точки в переносном движении, ускорение Кориолиса  $\vec{a}_k$ , найти силу инерции в переносном движении  $\vec{\Phi}_e$  и кориолисову силу инерции  $\vec{\Phi}_k$ . Добавить эти силы к силам, приложенным к материальной точке.

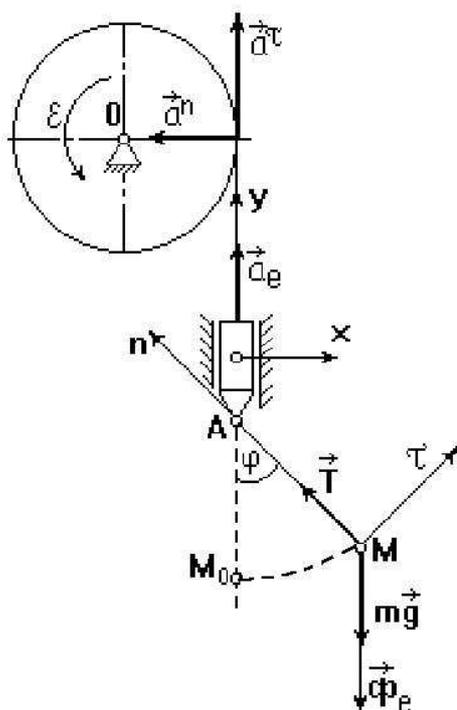
5. Составить дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки в проекциях на подвижные оси координат.

6. Проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения движения.

7. Записать начальные условия относительного движения материальной точки и определить постоянные интегрирования с помощью начальных условий движения.

8. Найденные произвольные постоянные подставить в результат интегрирования дифференциального уравнения и определить искомые величины.

Необходимо отметить, что при относительном криволинейном движении удобно использовать дифференциальные уравнения движения в проекциях на естественные оси координат.



*Пример 3.1.* Точка А подвеса математического маятника, имеющего длину  $AM=l=1\text{ м}$ , закреплена на свободном конце нерастяжимого каната, намотанного на шкив радиуса  $r=0,5\text{ м}$ . Определить малые колебания маятника, обладающего точечной массой  $m$ , если шкив вращается с угловым ускорением  $\varepsilon = 12\text{ с}^{-2}$ . Считать, что при

$t = 0, \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = \omega_0 = 4 \text{ c}^{-1}$ . При расчёте принять  $g = 10 \text{ M/c}^2$  (рис.3.4).

### Решение

Так как движение математического маятника сложное, то его можно разложить на переносное и относительное. Переносным движением будет поступательное движение ползуна вместе с точкой А подвеса маятника в вертикальных направляющих. Переносное ускорение  $\vec{a}_e$  равно тангенциальному ускорению точки обода шкива, т.е.  $a_e = \varepsilon \cdot r = 6 \text{ м/с}^2$ .

Относительным движением будет качание маятника вокруг точки А подвеса. Для определения относительного движения применим основное уравнение относительного движения при переносном поступательном движении:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e.$$

К точке М маятника приложены сила тяжести  $m\vec{g}$  и реакция нити  $\vec{T}$ . К этим силам добавим переносную силу инерции  $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$ , направленную противоположно переносному ускорению  $\vec{a}_e$ . Тогда получим:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{\Phi}_e. \quad (3.7)$$

Так как относительное движение криволинейное, то уравнение (3.7) спроектируем на естественные оси  $\tau$  и  $n$ :

$$m \frac{d^2 S_r}{dt^2} = -mg \cdot \sin \varphi - \Phi_e \cdot \sin \varphi = -m(g + a_e) \sin \varphi, \quad (3.8)$$

$$m \frac{V_r^2}{\rho} = T - (mg + \Phi_e) \cos \varphi.$$

Для определения малых колебаний маятника достаточно решить уравнение (3.8). Так

как  $S_r = M_o M = l\varphi$ , то  $\frac{d^2 S_r}{dt^2} = l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = l\ddot{\varphi}$ .

Подставим это значение в уравнение (3.8):

$$ml\ddot{\varphi} = -m(g + a_e) \sin \varphi.$$

Считая колебания малыми, примем  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \text{ где } k^2 = \frac{g + a_e}{l}, \quad (3.9)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt. \quad (3.10)$$

Продифференцировав это уравнение по времени, получим уравнение, определяющее угловую скорость маятника:

$$\dot{\varphi} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt. \quad (3.11)$$

Для определения  $c_1$  и  $c_2$  подставим начальные условия в уравнение (3.10) и (3.11).

Получим:  $c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{\omega_0}{k}.$

Тогда уравнение движения маятника примет вид:  $\varphi = \frac{\omega_0}{k} \sin kt$ , или, подставив численные значения, окончательно получим:

$$\varphi = \sin 4t.$$

*Пример 3.2.* Горизонтальная трубка СД равномерно вращается вокруг вертикальной оси АВ с угловой скоростью  $\omega$ . Внутри трубки находится шарик М массой  $m$ . Определить

скорость шарика относительно трубки в момент его вылета и время движения шарика в трубке, если в начальный момент  $t = 0, V = 0, x = x_0$ , длина трубки равна  $L$ . Трением пренебречь (рис. 3.5).

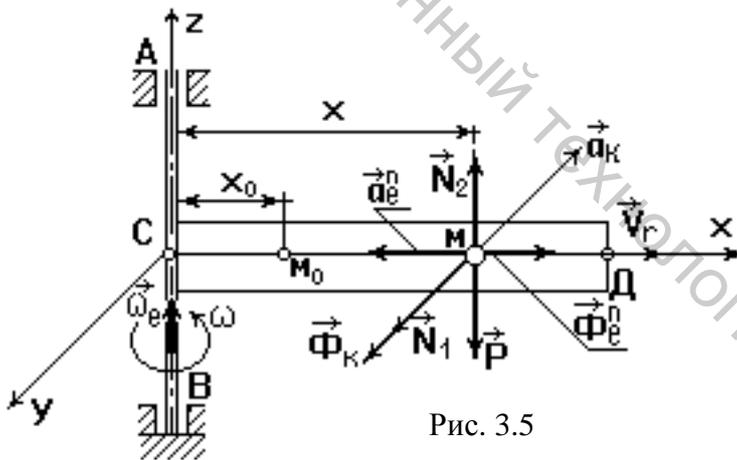


Рис. 3.5

#### Решение

Шарик М совершает сложное движение, которое разложим на относительное внутри трубки СД и переносное вращательное вместе с трубкой вокруг оси АВ.

Изобразим шарик в произвольном положении. К шарикау приложены силы:  $P$  - вес шарика и реакция  $\vec{N}$  стенок трубки, которую заменим двумя составляющими  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$ , параллельными осям  $y$  и  $z$  соответственно. Так как трубка вращается равномерно, то угловое ускорение трубки  $\varepsilon = 0$ . Поэтому вращательная сила инерции  $\vec{\Phi}_e^\tau = 0$ . К силам, действующим на шарик, добавим центробежную силу инерции  $\vec{\Phi}_e^n$  и кориолисову силу инерции  $\vec{\Phi}_K$ , которые направлены противоположно ускорениям  $\vec{a}_e^n$  и  $\vec{a}_K$ . Направление

ускорения Кориолиса  $\vec{a}_k$  можно определить по правилу Жуковского поворотом вектора относительной скорости  $\vec{V}_r$  на  $90^\circ$  в плоскости, перпендикулярной к оси переносного вращения, в сторону этого вращения. Следовательно, кориолисова сила инерции  $\vec{\Phi}_k$  направлена перпендикулярно к плоскости рисунка, совпадая с положительным направлением оси  $u$ .

$$\text{Модули сил инерции: } \Phi_e^n = ma_e^n = m\omega^2 x, \quad \Phi_k = ma_k = 2m\omega \cdot V_r \cdot \sin\left(\frac{\vec{\omega}, \vec{V}_r}{\omega, V_r}\right) = 2m\omega V_r.$$

Относительное движение шарика определяется векторным уравнением:

$$m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{\Phi}_e^n + \vec{\Phi}_k. \quad (3.12)$$

Спроектируем это уравнение на ось  $x$  относительного движения:  $m \frac{dV_r}{dt} = m\omega^2 x$ , или

$$\frac{dV}{dt} = \omega^2 x. \quad (3.13)$$

Для определения скорости шарика в момент его вылета из трубки правую и левую часть уравнения (3.13) умножим на  $dx$ :

$$\frac{dV}{dt} \cdot dx = \omega^2 x dx,$$

откуда

$$V dV = \omega^2 x dx. \quad (3.14)$$

При интегрировании уравнения (3.14) воспользуемся определёнными интегралами. При изменении скорости от  $V_0=0$  до искомого значения  $V$  координата точки изменяется от  $x_0$  до

$$L: \int_0^V V dV = \omega^2 \int_{x_0}^L x dx, \quad \text{или} \quad \frac{V^2}{2} = \omega^2 \frac{L^2 - x_0^2}{2}.$$

Получим искомую скорость

$$V = \omega \sqrt{L^2 - x_0^2} \quad (3.15)$$

Время движения шарика в трубке определим из уравнения (3.15), заменив  $L$  текущим значением  $x$  и представив  $V = \frac{dx}{dt}$ .

Получим

$$\frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{x^2 - x_0^2} \quad (3.16)$$

Разделим переменные в уравнении (3.16):  $\frac{dx}{\omega \sqrt{x^2 - x_0^2}} = dt$ .

Проинтегрируем это уравнение:

$$\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} = \int_0^T dt. \quad (3.17)$$

Для интегрирования левой части уравнения (3.17) используем формулу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C',$$

где постоянная  $C'$  содержит  $\ln a$ .

Получим, что

$$T = \frac{1}{\omega} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - x_0^2} \right| \Bigg|_{x_0}^L = \frac{1}{\omega} \left[ \ln \left( L + \sqrt{L^2 - x_0^2} \right) - \ln x_0 \right].$$

Окончательно  $T = \frac{1}{\omega} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0}$

## Раздел второй

# ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

---

## Глава IV

### ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

#### 4.1. Классификация сил, действующих на механическую систему

Системой материальных точек или механической системой называется совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны.

Силы, действующие на механическую систему, можно разделить на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на точки системы, вызванные действием тел, не входящих в систему.

Внутренними называются силы взаимодействия между точками данной механической системы.

Внешние силы обозначаются верхним индексом “e”, а внутренние - верхним индексом “i”.

$\bar{F}^e$  - внешняя сила,  $\bar{F}^i$  - внутренняя сила.

Свойства внутренних сил:

1. Главный вектор внутренних сил механической системы равен нулю:

$$\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0. \quad (4.1)$$

2. Главный момент всех внутренних сил системы относительно любого центра равен нулю:

$$\bar{M}_o^i = \sum m_o \left( \vec{r}_k^i \right) = 0. \quad (4.2)$$

#### 4.2. Центр масс механической системы

Центром масс или центром инерции механической системы называется геометрическая точка, радиус - вектор  $\vec{r}$  которой определяется равенством

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}. \quad (4.3)$$

Декартовы координаты центра масс определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} X_c &= \frac{\sum m_k x_k}{M} \\ Y_c &= \frac{\sum m_k y_k}{M} \\ Z_c &= \frac{\sum m_k z_k}{M} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

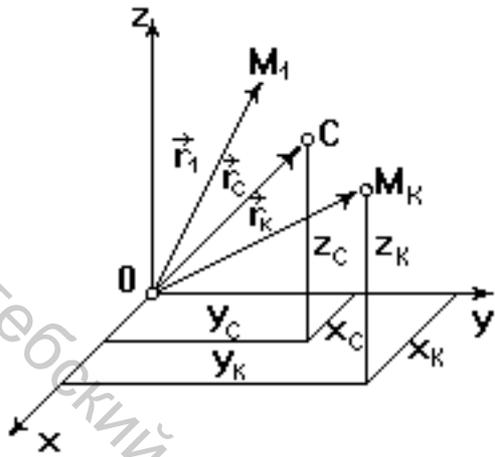


Рис. 4.1

В этих формулах  $\vec{r}_k$ ,  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$  - соответственно радиус - вектор и координаты  $k$ -ой точки системы,  $m_k$  - масса  $k$ -ой точки,  $M = \sum m_k$  - масса всей системы.

Зависимость между скоростью центра масс и скоростями точек механической системы имеет вид:

$$\vec{V}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_k \vec{V}_k}{M}.$$

Зависимость между ускорением центра масс и ускорениями точек механической системы

выражается соотношением  $\vec{a}_c = \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \frac{\sum m_k \vec{a}_k}{M}$ .

### 4.3. Моменты инерции твёрдого тела

Момент инерции - величина, характеризующая распределение масс в теле и являющаяся мерой инертности тела при вращательном движении.

Различают полярные, осевые, планарные и центробежные моменты инерции.

Моментом инерции твёрдого тела относительно полюса (полярным моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния этой точки до полюса O:

$$I_O = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \quad (4.5)$$

Моментом инерции твёрдого тела относительно оси (осевым моментом инерции), называется величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния этой точки до оси:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) \\ I_y &= \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) \\ I_z &= \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

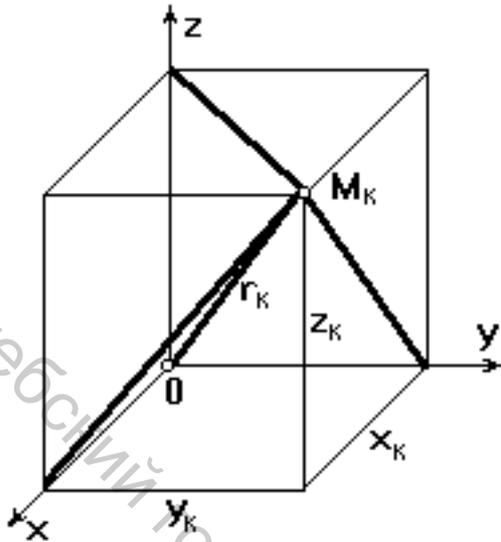


Рис. 4.2

Моментом инерции твёрдого тела относительно плоскости (планарным моментом инерции) называется величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния этой точки до плоскости:

$$I_{yOz} = \sum m_k x_k^2, I_{zOx} = \sum m_k y_k^2, \\ I_{xOy} = \sum m_k z_k^2. \quad (4.7)$$

Радиусом инерции тела относительно данной оси называется расстояние  $\rho$  от оси до точки, в которой нужно сосредоточить массу  $M$  всего тела, чтобы момент инерции точки относительно данной

оси равнялся моменту инерции тела относительно той же оси:

$$I_z = M \rho^2. \quad (4.8)$$

Кроме осевых и полярных моментов инерции, введём центробежные моменты инерции, которые характеризуют динамическую неуравновешенность твёрдого тела

$$I_{yz} = \sum m_k y_k z_k, I_{zx} = \sum m_k z_k x_k, I_{xy} = \sum m_k x_k y_k. \quad (4.9)$$

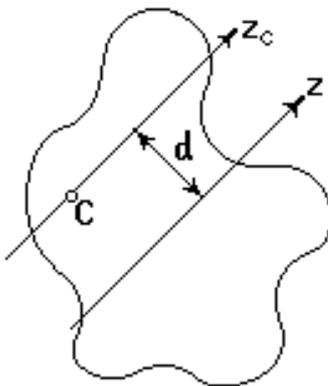
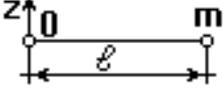
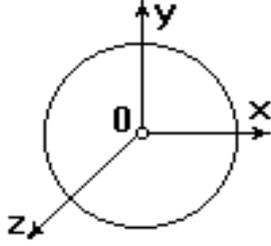
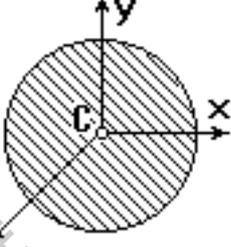
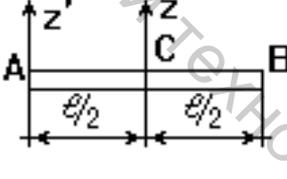
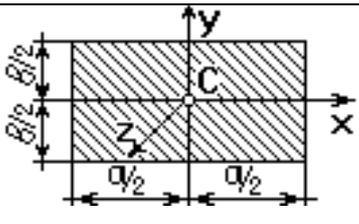
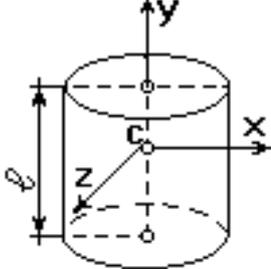


Рис. 4.3

Существует простая связь между моментами инерции твёрдого тела относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс. Эта связь устанавливается теоремой Гюйгенса-Штейнера: момент инерции твёрдого тела относительно некоторой оси равен моменту инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I_z = I_{z_c} + M d^2. \quad (4.10)$$

Таблица 4. Моменты инерции некоторых однородных твёрдых тел

№ п/п	Название твёрдого тела	Вид твёрдого тела	Моменты инерции
1	Материальная точка массы $m$		$I_z = ml^2$
2	Тонкое однородное кольцо массы $M$ и радиуса $R$ .		$I_z = MR^2$
3	Круглый однородный диск массы $M$ и радиуса $R$ .		$I_z = \frac{MR^2}{2},$ $I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}$
4	Тонкий однородный стержень массы $M$ и длины $l$ .		$I_{zC} = \frac{Ml^2}{12},$ $I_{z'A} = \frac{Ml^2}{3}.$
5	Однородная прямоугольная пластина массы $M$ .		$I_z = \frac{M}{12}(a^2 + b^2), I_x = \frac{M}{12}b^2,$ $I_y = \frac{M}{12}a^2.$
6	Круглый цилиндр массы $M$ , радиуса $R$ и высотой $l$ .		$I_z = I_x = M \left( \frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right),$ $I_y = \frac{MR^2}{2}.$

## Глава V

### ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

#### 5.1. Дифференциальные уравнения движения механической системы

Применим к каждой произвольной точке  $k$  механической системы второй закон Ньютона

$$m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i, \quad (5.1)$$

где  $\vec{F}_k^e$  - равнодействующая всех внешних сил,  $\vec{F}_k^i$  - равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к  $k$ -ой точке.

В проекциях на неподвижные оси декартовых координат:

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= F_{kx}^e + F_{kx}^i, \\ m_k \ddot{y}_k &= F_{ky}^e + F_{ky}^i, \\ m_k \ddot{z}_k &= F_{kz}^e + F_{kz}^i. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Векторное уравнение (5.1), или эквивалентные им скалярные уравнения (5.2), представляют дифференциальные уравнения движения всех точек механической системы. Число дифференциальных уравнений в векторной форме равно  $n$ , а число дифференциальных уравнений в координатной форме равно  $3n$ .

Для определения движения механической системы  $n$  материальных точек следует решить систему  $3n$  обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с  $3n$  неизвестными функциями одной независимой переменной  $t$ . Следовательно, общее решение зависит от  $6n$  произвольных постоянных, для определения которых должны быть заданы  $6n$  начальных условий движения.

#### 5.2. Теорема о движении центра масс системы

Теорема о движении центра масс является следствием основных законов Ньютона и формулируется следующим образом:

Центр масс механической системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему, т.е.

$$M \vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e, \quad (5.3)$$

где  $M$  - масса системы,  $\vec{a}_c$  - ускорение центра масс системы,  $\sum \vec{F}_k^e$  - геометрическая сумма всех внешних сил, приложенных к системе, равная главному вектору внешних сил.

Спроектировав векторное уравнение (5.3) на оси прямоугольных декартовых координат, получим:

$$M \ddot{X}_c = \sum F_{kx}^e, \quad M \ddot{Y}_c = \sum F_{ky}^e, \quad M \ddot{Z}_c = \sum F_{kz}^e. \quad (5.4)$$

При решении задач следует иметь в виду, что

$$M \ddot{X}_c = \sum m_k \ddot{x}_k, \quad M \ddot{Y}_c = \sum m_k \ddot{y}_k, \quad M \ddot{Z}_c = \sum m_k \ddot{z}_k,$$

где  $\ddot{x}_k, \ddot{y}_k, \ddot{z}_k$  - проекции абсолютного ускорения точек системы на оси декартовых координат.

Уравнение (5.3) и (5.4) описывают поступательное движение твёрдого тела.

Теорема о движении центра масс позволяет получить важные следствия, которые называются законами сохранения движения центра масс.

1. Если главный вектор внешних сил, приложенных к механической системе, равен нулю, то центр масс движется равномерно и прямолинейно.

2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось есть величина постоянная.

Пусть  $R_x^e = \sum F_{kx}^e = 0$ . Тогда из первого уравнения системы (5.4) получим, что

$$\ddot{x}_c = 0, \quad \text{откуда } \dot{x}_c = V_{cx} = \text{const}.$$

В частности, если в начальный момент времени  $\dot{x}_{c_0} = 0$ , то и в любой последующий момент  $\dot{x}_c = 0$ . В этом случае центр масс системы вдоль оси  $Ox$  перемещаться не будет, т.е.  $x_c = \text{const}$ .

Если имеет место закон сохранения движения центра масс вдоль оси  $Ox$ , то алгебраическая сумма произведений масс точек системы на проекции абсолютных перемещений этих точек на эту ось должна быть равна нулю, при условии, что  $\dot{x}_c = 0$ ;  $x_c = 0$ .

$$\sum m_k \Delta x_k = 0. \quad (5.5)$$

Задачи с помощью теоремы о движении центра масс рекомендуется решать в следующей последовательности.

1. Изобразить на рисунке все внешние силы.
2. Выбрать систему осей координат.
3. Записать теорему о движении центра масс в проекциях на декартовы оси координат.
4. Вычислить сумму проекций всех внешних сил системы на оси декартовых координат и подставить их в дифференциальные уравнения движения центра масс системы в выбранной системе координат.
5. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения.
6. Записать начальные условия движения для определения произвольных постоянных интегрирования.
7. Определить произвольные постоянные интегрирования по начальным условиям задачи.
8. Подставить найденные произвольные постоянные в результат интегрирования дифференциальных уравнений движения центра масс системы и найти неизвестные величины.

С помощью теоремы о движении центра масс можно решать как прямые, так и обратные задачи динамики.

Задачи, решаемые с помощью теоремы о движении центра масс, могут быть двух типов. Первый тип - задачи, решаемые с помощью уравнений (5.4), которые в зависимости от условий задачи позволяют решать прямую либо обратную задачи динамики. Второй тип - задачи, решаемые применением закона сохранения движения центра масс.

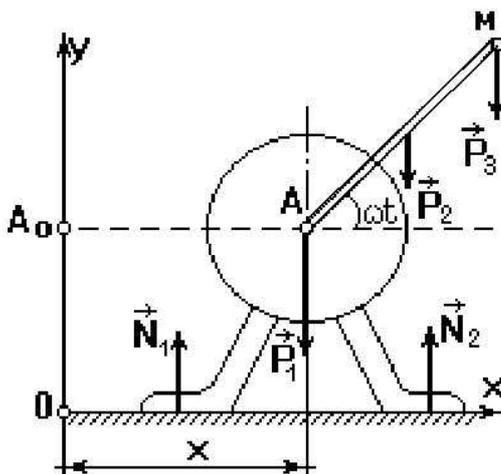


Рис. 5.1

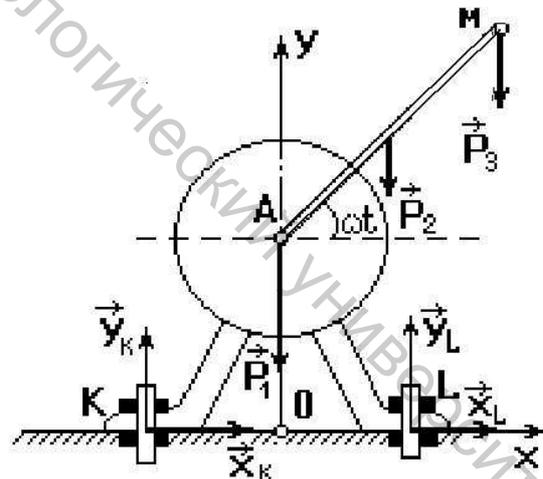


Рис. 5.2

*Пример 5.1.* Электрический мотор массы  $M_1$ , установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте. На валу мотора под прямым углом закреплён одним концом однородный стержень длины  $2l$  и массы  $M_2$ , на другой конец стержня насажен точечный груз массы  $M_3$ . Угловая скорость вала равна  $\omega$ . Определить: 1) горизонтальное движение

мотора (рис.5.1); 2) наибольшее горизонтальное усилие  $R$ , действующее на болты, если ими будет закреплён кожух электромотора на фундаменте (рис. 5.2).

### Решение

1. Для определения перемещения корпуса электромотора применим теорему о движении центра масс системы в проекции на ось  $x$ . Рассмотрим механическую систему, состоящую из корпуса электромотора, стержня  $AM=2l$  и точечного груза. На данную систему действуют внешние силы:  $\vec{P}_1$  - сила тяжести корпуса электромотора;  $\vec{P}_2$  - сила тяжести стержня;  $\vec{P}_3$  - сила тяжести точечного груза;  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  - реакция горизонтальной гладкой плоскости (рис. 5.1).

Свяжем систему координат  $Oxy$  с начальным положением центра масс корпуса электромотора.

В проекции на ось  $x$  получим:  $M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e$ , или в нашей задаче

$$M\ddot{x}_c = 0, \quad (5.6)$$

так как  $\sum F_{kx}^e = 0$ . Получим, что имеет место закон сохранения движения центра масс вдоль оси  $x$ .

Проинтегрируем уравнение (5.6) дважды:

$$M\dot{x}_c = C_1, \quad Mx_c = C_1 t + C_2. \quad (5.7)$$

Используя формулу координаты центра масс системы, определим  $x_c$ :

$$x_c = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{M},$$

где  $x_1 = x$  - абсцисса центра масс корпуса электромотора;

$x_2 = x + l \cdot \cos \omega t$  - абсцисса центра масс стержня  $AM$ ;

$x_3 = x + 2l \cdot \cos \omega t$  - абсцисса точечного груза;

$M = M_1 + M_2 + M_3$  - масса всей системы.

Тогда

$$x_c = x + \frac{(M_2 + 2M_3)}{M} l \cdot \cos \omega t. \quad (5.8)$$

Подставив полученное значение  $x_c$  в равенство (5.7), получим

$$Mx + (M_2 + 2M_3)l \cdot \cos \omega t = C_1 t + C_2. \quad (5.9)$$

Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  продифференцируем обе части равенства (5.9) по времени:

$$M \dot{x} - (M_2 + 2M_3) l \omega \sin \omega t = C_1, \quad (5.10)$$

где  $\dot{x}$  - скорость центра масс корпуса электромотора. Начальные условия: при  $t = 0$ ,  $x_{AO} = 0$ ,  $\dot{x}_{AO} = 0$ . Подставив эти значения в равенства (5.9) и (5.10), получим, что  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = (M_2 + 2M_3)l$ .

Тогда окончательно

$$x = \frac{(M_2 + 2M_3)l}{M_1 + M_2 + M_3} (1 - \cos \omega t). \quad (5.11)$$

2. Для определения горизонтального усилия, действующего на болты, рассмотрим ту же механическую систему (рис. 5.2.).

В этом случае на систему, кроме указанных ранее сил тяжести  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ , действуют составляющие  $\vec{X}_K, \vec{Y}_K, \vec{X}_L, \vec{Y}_L$  реакций болтов К и L. Для определения составляющих  $X_K$  и  $X_L$  применим теорему о движении центра масс механической системы в проекции на ось  $x$ , связав систему координат  $Ox$  с неподвижной точкой А:

$$M \ddot{X}_c = X_K + X_L. \quad (5.12)$$

Определим  $x_c$ , учитывая, что корпус электромотора закреплён:  $X_c = \frac{M_2 x_2 + M_3 x_3}{M}$ , где  $x_2 = l \cdot \cos \omega t$ ;  $x_3 = 2l \cdot \cos \omega t$ .

Тогда

$$X_c = \frac{M_2 + 2M_3}{M} l \cdot \cos \omega t. \quad (5.13)$$

Дважды продифференцировав равенство (5.13) по времени, получим

$$\ddot{X}_c = -\frac{M_2 + 2M_3}{M} l \omega^2 \cdot \cos \omega t.$$

Подставив полученное выражение в уравнение (5.12), определим горизонтальное усилие, действующее на болты:

$$R_x = x_K + x_L = -(M_2 + 2M_3) l \omega^2 \cdot \cos \omega t.$$

Учитывая, что  $|\cos \omega t| \leq 1$ , наибольшее горизонтальное усилие определяется величиной

$$R_x^{max} = (M_2 + 2M_3)l \cdot \omega^2.$$

## ГЛАВА VI

### ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

#### 6.1. Количество движения материальной точки и механической системы

Количеством движения материальной точки называется вектор, равный произведению массы движущейся точки на вектор её скорости, т.е.

$$\vec{K} = m \vec{V}. \quad (6.1)$$

Количество движения является мерой механического движения.

Обычно при решении задач приходится оперировать не с самим вектором количества движения, а с его проекциями на оси координат:

$$K_x = mV_x, \quad K_y = mV_y, \quad K_z = mV_z, \quad (6.2)$$

где  $V_x, V_y, V_z$  - проекции скорости на оси координат.

Единицей количества движения является количество движения точки, имеющей единицу массы и движущейся со скоростью, равной единице скорости, т.е.  $1 \text{ кг} \cdot 1 \frac{\text{м}}{\text{с}} =$

$$= 1 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Количеством движения механической системы называется вектор, равный геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек, входящих в эту систему:

$$\vec{K} = \sum m_k \vec{V}_k. \quad (6.3)$$

Количество движения системы можно представить в виде

$$\vec{K} = M \vec{V}_c, \quad (6.4)$$

т.е. количество движения системы материальных точек равно количеству движения центра масс этой системы, если сосредоточить в нём массу всей системы.

## 6.2. Импульс силы

Импульс силы представляет собой величину, характеризующую действие силы в зависимости от времени её действия.

Элементарным импульсом силы называется импульс силы за элементарный промежуток времени, т.е.

$$d\vec{S} = \vec{F} dt. \quad (6.5)$$

Полный импульс за конечный промежуток времени представляет собой векторный интеграл

$$\vec{S} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt. \quad (6.6)$$

В проекциях на декартовы оси координат имеем:

$$S_x = \int_{t_0}^t F_x dt, \quad S_y = \int_{t_0}^t F_y dt, \quad S_z = \int_{t_0}^t F_z dt. \quad (6.7)$$

Модуль импульса силы

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2},$$

а направляющие косинусы определяются по формуле:

$$\cos(\vec{S}, \hat{x}) = \frac{S_x}{S}; \quad \cos(\vec{S}, \hat{y}) = \frac{S_y}{S}; \quad \cos(\vec{S}, \hat{z}) = \frac{S_z}{S}.$$

Импульс равнодействующей нескольких сил за некоторый промежуток времени равен геометрической сумме импульсов составляющих сил за этот промежуток времени.

$$\vec{S}(\vec{R}) = \sum \vec{S}(\vec{F}_k).$$

## 6.3. Теоремы об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной и интегральной формах

Теорему об изменении количества движения материальной точки можно выразить двумя способами:

1) дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу силы, действующей на эту точку, который получим из выражения

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F} \quad \text{или} \quad d(m\vec{V}) = \vec{F} dt = d\vec{s}. \quad (6.8)$$

2) изменение количества движения материальной точки за конечный промежуток времени равно полному импульсу силы, действующей на точку, за тот же промежуток времени:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} dt = \vec{S}. \quad (6.9)$$

Проектируя векторные равенства (6.8) и (6.9) на три неподвижные координатные оси, получим выражение теоремы об изменении количества движения материальной точки в скалярной форме:

$$d(mV_x) = F_x dt = dS_x, \quad d(mV_y) = F_y dt = dS_y, \quad d(mV_z) = F_z dt = dS_z, \quad (6.10)$$

$$\left. \begin{aligned} mV_x - mV_{0x} &= \int_{t_0}^t F_x dt = S_x \\ mV_y - mV_{0y} &= \int_{t_0}^t F_y dt = S_y \\ mV_z - mV_{0z} &= \int_{t_0}^t F_z dt = S_z \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Если сила, действующая на точку, равна нулю, то  $d(m\vec{V}) = 0$  и  $m\vec{V} = const$ , т.е. в этом случае количество движения материальной точки является постоянной векторной величиной.

Задачи на применение теоремы об изменении количества движения материальной точки следует решать в такой последовательности:

- 1) изобразить на рисунке действующие на точки силы, т.е. задаваемые силы и реакции связей;
- 2) выбрать систему координат;
- 3) записать теорему об изменении количества движения материальной точки в проекциях на эти оси:  $mV_x - mV_{0x} = S_x$ ,  $mV_y - mV_{0y} = S_y$ ,  $mV_z - mV_{0z} = S_z$ .

Проекции импульса силы на оси координат можно определить по формулам (6.7).

*Пример 6.1.* Материальная точка массы  $m$  движется в плоскости  $Oxy$  согласно уравнениям  $x = a \cos kt$ ,  $y = a \sin kt$ , где  $a$ ,  $k$  - постоянные коэффициенты. Найти импульс сил, действующих на

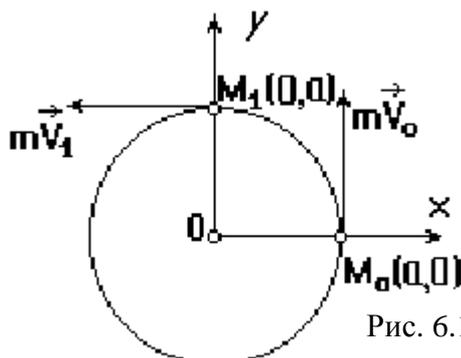


Рис. 6.1

точку, за время её перемещения из положения  $M_0$  в положение  $M_1$  (рис. 6.1).

### Решение

Применим теорему об изменении количества движения материальной точки  $m\vec{V}_1 - m\vec{V}_0 = \vec{S}$ , или в проекциях на оси  $x$  и  $y$ :  $mV_{1x} - mV_{0x} = S_x$ ,  $mV_{1y} - mV_{0y} = S_y$ .

Траекторией точки является окружность радиуса  $a$ . Проекции скорости на оси  $x$  и  $y$  равны:  $V_x = \dot{x} = -ak \sin kt$ ,  $V_y = \dot{y} = ak \cos kt$ .

Укажем направления векторов количества движения точки в положении  $M_0$  и  $M_1$ .

Учитывая, что  $V_{0x} = 0$  и  $V_{1y} = 0$ , получим проекции импульса на оси координат

$$S_x = -mV_{1x} = m a k \sin kt,$$

$$S_y = -mV_{0y} = m a k \cos kt.$$

Тогда

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = m a k.$$

## **6.4. Теоремы об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и интегральной формах**

Теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме можно сформулировать двумя способами:

1. Векторная производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, приложенных к этой системе:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}^e, \quad (6.12)$$

т.е. скорость изменения количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил.

2. Дифференциал количества движения механической системы равен элементарному импульсу главного вектора внешних сил этой системы:

$$d\vec{K} = \vec{R}^e dt = d\vec{S}^e. \quad (6.13)$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в интегральной форме:

Изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно импульсу главного вектора внешних сил за тот же промежуток времени, т.е.

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \int_{t_0}^t \vec{R}^e dt = \vec{S}^e. \quad (6.14)$$

В проекциях на оси декартовых координат векторное равенство (6.14) имеет вид:

$$K_x - K_{0x} = S_x^e, \quad K_y - K_{0y} = S_y^e, \quad K_z - K_{0z} = S_z^e.$$

Следствие (закон сохранения количества движения механической системы).

1) Если главный вектор внешних сил равен нулю, то количество движения системы остаётся постоянным по модулю и направлению, т.е. если  $\vec{R}^e = 0$ , то  $\vec{K} = const$ .

2) Если проекция главного вектора внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось остаётся постоянной, т.е. если  $R_x^e = 0$ , то  $K_x = const$ .

Задачи на применение теоремы об изменении количества движения системы рекомендуется решать в такой последовательности:

1. Изобразить систему в текущий момент.
2. Изобразить на рисунке все внешние силы, действующие на систему.
3. Выбрать неподвижную систему координат.
4. Записать теорему об изменении количества движения системы в проекциях на оси выбранной системы координат.
5. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения.
6. Составить начальные условия задачи.
7. Определить произвольные постоянные интегрирования по начальным условиям.
8. Найденные произвольные постоянные подставляем в результат интегрирования дифференциальных уравнений.

*Пример 6.2.* Массы груза 1 и колеса 2 одинаковы и равны  $m$ . Пренебрегая массой каната и блока, а также проскальзыванием колеса по горизонтальной плоскости, по заданному закону движения груза  $S=2at$  определить модуль количества движения системы (рис. 6.2).

#### Решение

Данная механическая система состоит из груза и колеса. Количество движения

$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2$ , где  $\vec{K}_1$  - количество движения груза,  $\vec{K}_2$  - количество движения колеса.

Количество движения груза

$$\vec{K}_1 = m_1 \vec{V}_1 = m \vec{V}_1.$$

Скорость груза  $V_1$  равна

$$V_1 = \frac{dS}{dt} = 2a.$$

Тогда  $K_1 = 2am$ . Вектор  $\vec{K}_1$  направлен в сторону движения груза 1.

Количество движения колеса 2:

$$\vec{K}_2 = m_2 \vec{V}_C = m \vec{V}_C.$$

Скорость центра масс  $C$  колеса равна половине скорости груза. т.е.

$$V_C = \frac{V_1}{2} = a.$$

Тогда численно  $K_2 = ma$ . Вектор  $\vec{K}_2$  количества движения колеса совпадает с направлением вектора скорости точки  $C$ .

Учитывая, что вектора  $\vec{K}_1$  и  $\vec{K}_2$  взаимноперпендикулярны, определим модуль количества движения системы:

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} = am\sqrt{5}.$$

Пример 6.3.

Кривошипно-ползунный механизм прикреплен к станине массы  $M$ , установленной на гладком горизонтальном фундаменте. Масса ползуна  $B$  равна  $m$ . Пренебрегая массой звеньев  $OA$  и  $AB$ , длины которых одинаковы и равны  $l$ , найти максимальное значение скорости станины, если кривошип  $OA$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . В момент

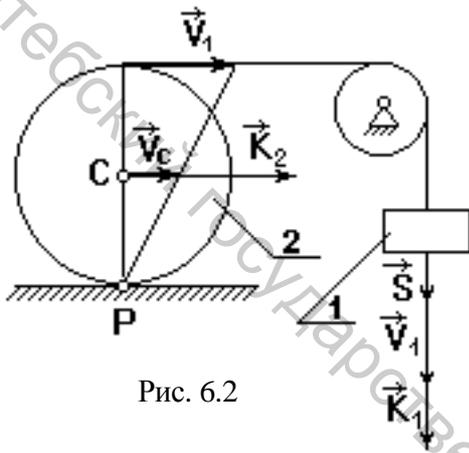


Рис. 6.2

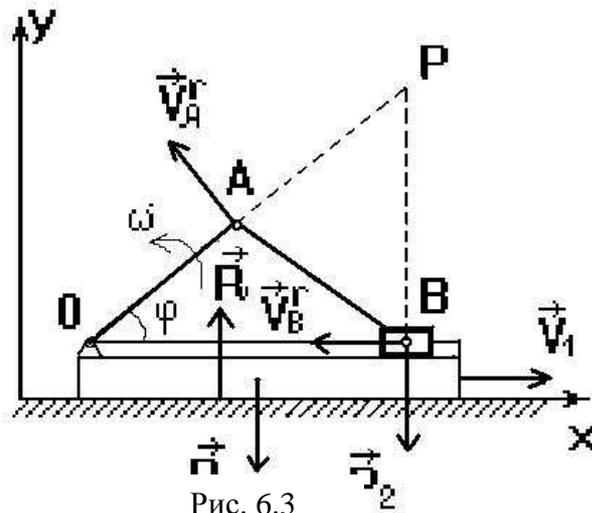


Рис. 6.3

$t=0, \varphi_0=0$  (рис. 6.3.).

Решение.

Изобразим внешние силы, действующие на данную механическую систему:  $\vec{P}_1$  - вес станины;  $\vec{P}_2$  - вес ползуна;  $\vec{R}$  - реакция гладкой горизонтальной плоскости.

Направим ось  $x$  по горизонтали вправо. Запишем теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме в проекции на ось  $x$ :

$$\frac{dK_x}{dt} = R_x^e.$$

Так как сумма проекций внешних сил на ось  $x$  равна нулю, то  $K_x = \text{const}$ .

Следовательно, имеет место случай сохранения главного вектора количеств движения системы в проекции на ось  $x$ , т.е.  $K_{x0} = K_{x1}$ .

В начальный момент система находилась в покое, поэтому  $K_{x0} = 0$ .

Вычислим проекцию количества движения станины и ползуна  $B$  на ось  $x$  в текущий момент времени. Пусть станина движется вправо с искомой скоростью  $\vec{V}_1$ .

Так как ползун  $B$  совершает сложное движение, то для определения скорости ползуна необходимо применить теорему о сложении скоростей точки  $\vec{V}_B = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ . Движение ползуна  $B$  вместе со станиной - переносное, поэтому  $V_e = V_1$ , движение ползуна по отношению к станине - относительное. В проекции на ось  $x$ , с учётом направления относительной скорости ползуна  $B$ , имеем:

$$V_{Bx} = V_1 - V_B^r.$$

Вычислим относительную скорость ползуна. Зная направления относительных скоростей точек  $A$  и  $B$  кривошипно-ползунного механизма, построим мгновенный центр скоростей  $P$  звена  $AB$ . Скорость  $V_A^r = \omega l$ . Тогда из соотношения  $\frac{V_A^r}{V_B^r} = \frac{AP}{BP}$  находим  $V_B^r$ .

Имеем, что  $AP = l$ ,  $BP = 2l \sin \omega t$ . Получим, что  $V_B^r = 2l\omega \sin \omega t$ .

Следовательно, проекция количества движения системы на ось  $x$  равна:

$$K_{x1} = MV_1 + mV_{Bx} = MV_1 + m(V_1 - 2l\omega \sin \omega t).$$

Учитывая, что  $K_{x0} = K_{x1}$ , получим

$$MV_1 + m(V_1 - 2l\omega \sin \omega t) = 0,$$

откуда

$$V_1 = \frac{2ml\omega}{M+m} \sin \omega t.$$

Так как  $|\sin \omega t| \leq 1$ , то искомое максимальное значение скорости станины

$$V_1^{max} = \frac{2ml\omega}{M+m}.$$

## Глава VII

### ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

#### 7.1. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси

Так как количество движения  $m\vec{V}$ , как и сила  $\vec{F}$ , является величиной векторной, то момент количества движения относительно центра или оси определяется так же, как момент силы относительно того же центра или той же оси.

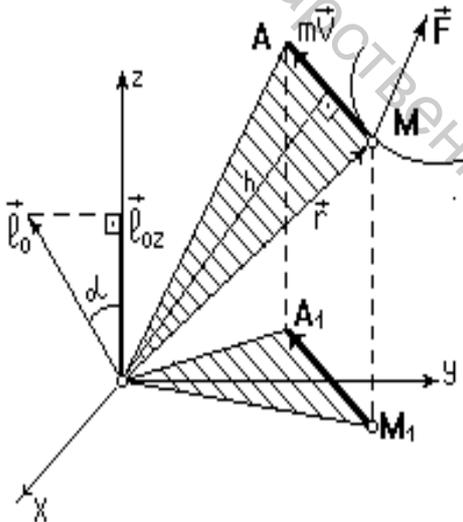


Рис. 7.1

Моментом количества движения (кинетическим моментом) материальной точки относительно центра O называется векторная величина, определяемая равенством

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m\vec{V}, \quad (7.1)$$

где  $m\vec{V}$  - вектор количества движения материальной точки,  $\vec{r}$  - радиус - вектор этой точки относительно центра O.

Модуль этого вектора равен

$$|\vec{l}_0| = mVh, \text{ где } h \text{ - кратчайшее расстояние от центра O до вектора } m\vec{V} \text{ (рис.7.1).}$$

Момент количества движения материальной точки относительно оси равен проекции на эту ось момента количества движения материальной точки относительно любого центра, лежащего на этой оси:

$$l_z = l_0 \cos \alpha. \quad (7.2)$$

Моменты количества движения материальной точки относительно координатных осей, проходящих через центр O можно определить по формулам:

$$l_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad l_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

где  $x, y, z$  - координаты материальной точки,  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  - проекции скорости точки оси  $x, y, z$ .

## 7.2. Теоремы об изменении момента количества движения материальной точки

В векторной форме теорема об изменении момента количества движения материальной точки выражается так:

производная по времени от вектора момента количества движения материальной точки относительно неподвижного центра  $O$  равна сумме моментов сил, приложенных к материальной точке, относительно того же центра, т.е.

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \sum \vec{m}_O (\vec{F}_k). \quad (7.3)$$

Проектируя векторное равенство (7.3) на какую-либо ось, проходящую через центр  $O$ , получаем уравнение, выражающее ту же теорему в скалярной форме:

$$\frac{dl_x}{dt} = \sum m_x \left( \vec{F}_k \right), \text{ т.е.} \quad (7.4)$$

производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторой оси равна сумме моментов сил, приложенных к материальной точке, относительно той же оси.

Формулы (7.3) и (7.4) позволяют решать задачи в случае движения точки под

действием центральной силы. Центральной силой называется такая сила, линия действия которой все время проходит через одну и ту же точку, называемую центром этой силы. Если материальная точка движется под действием центральной силы  $\vec{F}$  с центром в точке  $O$ , то

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{m}_O (\vec{F}) = 0,$$

следовательно,  $\vec{l}_O = \text{const}$ .

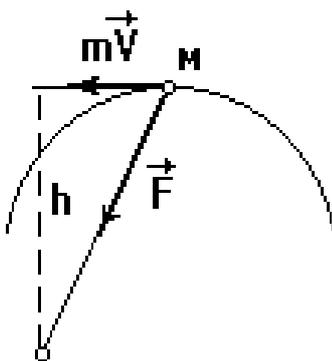


Рис. 7.2

Таким образом, момент количества движения в данном случае остаётся постоянным по модулю и по направлению. Отсюда следует, что материальная точка под действием центральной силы описывает плоскую кривую, лежащую в плоскости, проходящей через центр силы.

**Пример 7.1** Точка М массы  $m$  описывает окружность радиуса  $a$ , притягиваясь к точке О этой окружности. В начальный момент точка находится в положении В и имеет скорость

$\vec{V}_0$ . Определить скорость  $V$  точки и силу притяжения  $\vec{F}$  как функции радиуса-вектора  $\vec{r} = \vec{OM}$ .

Решение

Движение точки происходит под действием центральной силы  $\vec{F}$ , поэтому  $m_o \left( \vec{F} \right) = 0$ . Отсюда следует,

что момент количества движения

точки М относительно центра О сохраняет своё постоянное значение, т.е.

$$m_o \left( \vec{mV} \right) = m_o \left( \vec{mV}_0 \right).$$

Следовательно, можно составить соотношения:

$$mVh = mV_0 \cdot 2a, \text{ откуда } V = V_0 \frac{2a}{h}.$$

Учитывая, что  $OM = r = 2a \cdot \sin \alpha$ , имеем  $\sin \alpha = \frac{r}{2a}$ . Поэтому  $h = r \sin \alpha = \frac{r^2}{2a}$ .

Получим, что  $V = \frac{4a^2}{r^2} V_0$ .

Для определения силы притяжения  $\vec{F}$  спроектируем эту силу на главную нормаль  $n$ , проходящую через центр окружности А:

$$F_n = F \cdot \sin \alpha = m \frac{V^2}{\rho} = m \frac{V^2}{a},$$

отсюда

$$F = \frac{mV^2}{a \cdot \sin \alpha} = \frac{32ma^4}{r^5} \cdot V_0^2.$$

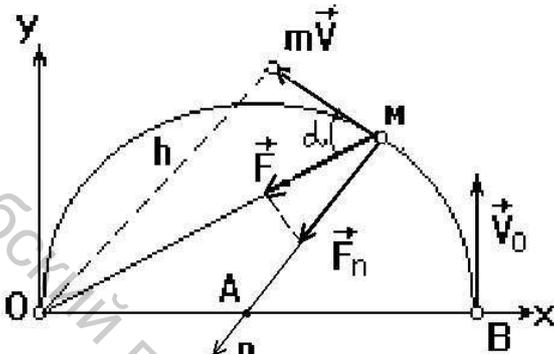


Рис. 7.3

### 7.3. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси

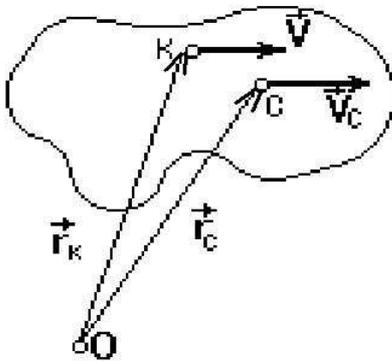
Кинетическим моментом, или главным моментом количеств движения механической системы относительно данного центра называется вектор, равный геометрической сумме моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно этого центра

$$\vec{L}_O = \sum \vec{l}_{kO} = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k. \quad (7.5)$$

Кинетическим моментом, или главным моментом количеств движения механической системы относительно оси называется алгебраическая сумма моментов количеств движения всех точек системы относительно той же оси:

$$\begin{cases} L_x = \sum M_x(m_k \bar{V}_k) = \sum m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k), \\ L_y = \sum M_y(m_k \bar{V}_k) = \sum m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k), \\ L_z = \sum M_z(m_k \bar{V}_k) = \sum m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k), \end{cases} \quad (7.6)$$

где  $x_k, y_k, z_k$  - координаты  $k$ -ой точки системы,  $\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k$  - проекции скорости этой точки на оси  $x, y, z$ ,  $m_k$  - масса этой точки.



При поступательном движении твёрдого тела его кинетический момент относительно некоторой точки  $O$  равен моменту количества движения центра масс  $C$  относительно этой точки в предположении, что в этом центре  $C$  сосредоточена вся масса тела, т.е.

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times M \vec{V}_C. \quad (7.7)$$

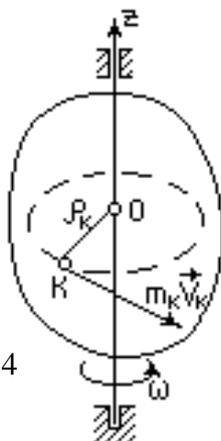
Кинетический момент твёрдого тела, вращающегося относительно неподвижной оси вращения, равен произведению угловой скорости тела на момент инерции его относительно оси вращения (рис. 7.4).

Имеем

$$L_z = \sum m_k V_k \cdot \rho_k = \sum m_k \omega \rho_k^2 = I_z \cdot \omega,$$

т.е.

Рис. 7.4



$$L_z = I_z \cdot \omega. \quad (7.8)$$

#### 7.4. Теоремы об изменении кинетического момента механической системы

Теорема об изменении кинетического момента в векторной форме формулируется так:

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно данного неподвижного центра  $O$  равна главному моменту внешних сил относительно того же центра, т.е.

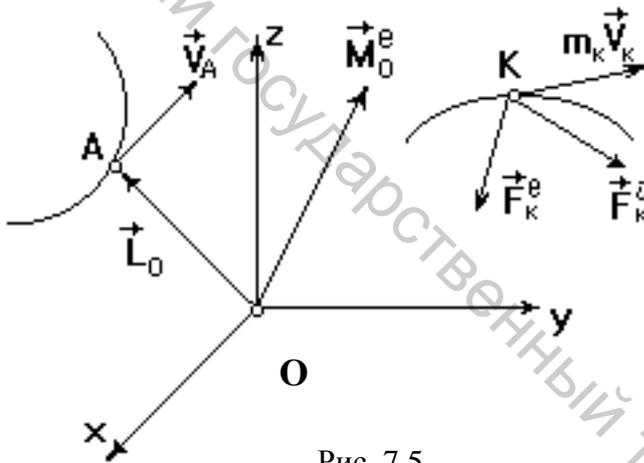


Рис. 7.5

$$\frac{d \vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^e \quad (7.9)$$

Рассмотрим кинематическую интерпретацию этой теоремы (рис.7.5). Если конец переменного вектора  $\vec{L}_O$  обозначим

через  $A$ , то производная  $\frac{d \vec{L}_O}{dt}$  выражает

скорость точки  $A$ , т.е.  $\frac{d \vec{L}_O}{dt} = \vec{V}_A$  и из

уравнения (7.9) имеем:

$$\vec{V}_A = \vec{M}_O^e. \quad (7.10)$$

Равенство (7.10) выражает теорему Резаля: скорость конца переменного вектора, изображающего кинетический момент механической системы относительно данного неподвижного центра, равна главному моменту внешних сил относительно того же центра.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно оси заключается в следующем:

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно данной неподвижной оси равна главному моменту внешних сил относительно этой оси, т.е.

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e. \quad (7.11)$$

Законы сохранения кинетического момента механической системы:

1. Если главный момент внешних сил относительно некоторого центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра остаётся постоянным, т.е.

$$\begin{array}{ccc} \rightarrow^e & \rightarrow & \rightarrow \\ \text{если } M_O = 0, & \text{то } L_O = \text{const.} & \end{array} \quad (7.12)$$

2. Если главный момент внешних сил относительно некоторой оси равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой же оси остаётся неизменным, т.е.

$$\text{если } M_x^e = 0, \text{ то } L_x = \text{const.} \quad (7.13)$$

Задачи с помощью теоремы об изменении кинетического момента системы относительно неподвижной оси рекомендуется решать в следующей последовательности:

1. Выбрать координатные оси, направив одну из них вдоль неподвижной оси вращения.
2. Изобразить все внешние силы системы на рисунке.
3. Записать теорему об изменении кинетического момента системы относительно соответствующей оси.
4. Вычислить моменты внешних сил относительно неподвижной оси.
5. Вычислить кинетический момент системы относительно неподвижной оси и затем взять производную по времени от кинетического момента системы.
6. Проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение, и в зависимости от условия задачи определить неизвестные величины.

Задачи с помощью теоремы о сохранении кинетического момента системы решают в такой последовательности:

Выполнить пункты 1-3. Показать, что главный момент внешних сил системы относительно оси равна нулю. Вычислить и приравнять кинетические моменты системы относительно оси в начальный и конечный моменты времени:  $L_{z0} = L_{z1}$ . Решив это уравнение, определить искомую величину.

Задачи, решаемые с помощью теоремы об изменении кинетического момента, можно разделить на две группы:

1. Задачи, в которых осуществляется сохранение кинетического момента относительно неподвижного центра или неподвижной оси, т.е. используются равенства (7.12) или (7.13).

2. Задачи, в которых кинетический момент системы относительно центра или неподвижной оси изменяется. В этом случае к решению задач применяем равенства (7.9) или (7.11).

*Пример 7.2.* Исполнительный механизм промышленного робота вращается с угловой скоростью  $\omega_0$

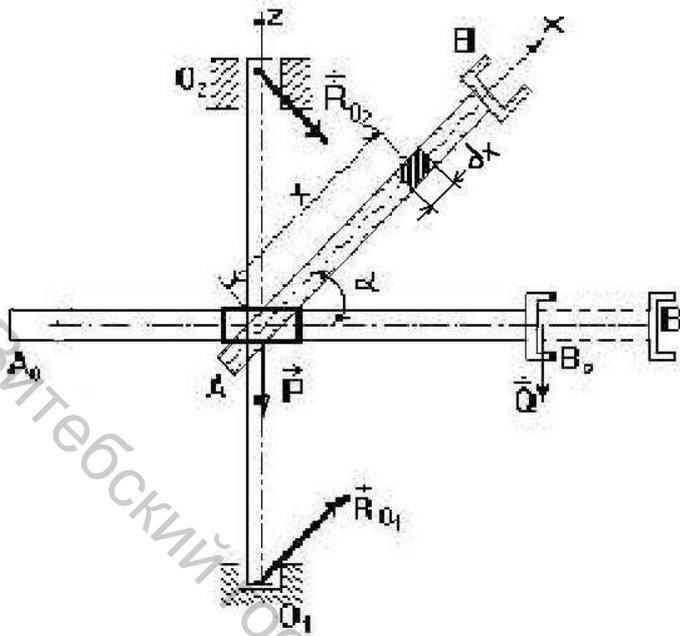


Рис. 7.6

вокруг вертикальной оси. Штанга АВ, несущая на конце В “схват”, находится в положении, при котором ось вращения проходит через середину её длины. Какова будет угловая скорость  $\omega_1$ , если штанга выдвинется горизонтально так, что конец А будет находится на оси вращения? Какова будет угловая скорость, если после этого штанга повернётся в вертикальной плоскости на угол  $\alpha$ ? Штангу считать однородным стержнем массы  $M$  и длины  $l$ , схват - точечной массой  $m$ . Момент инерции остальных вращающихся частей механизма равен  $I$  (рис. 7.6).

### Решение

Проведём ось  $z$  через неподвижную ось вращения  $O_1O_2$ . На данную систему действуют внешние силы:

- \* сила тяжести  $\vec{P}$  вращающейся оси  $O_1O_2$  и штанги;
- \* сила тяжести  $\vec{Q}$  “схвата” В;
- \* реакция  $\vec{R}_{O_2}$  подшипника  $O_2$ ;
- \* реакция  $\vec{R}_{O_1}$  подпятника  $O_1$ .

Так как указанные внешние силы либо пересекают ось  $z$ , либо ей параллельны, то

$\sum m_z(F_k^e) = 0$ , т.е.  $\frac{dL_z}{dt} = 0$ , Отсюда следует, что  $L_{z0} = L_{z1}$ , т.е. имеет место закон

сохранения кинетического момента системы относительно оси  $z$ .

Определим кинетический момент системы относительно оси  $z$  в начальный момент времени. Так как механизм робота вращается вокруг оси  $z$ , то

$$L_{zo} = (I + I_{A B_o} + I_{B_o}) \omega_o, \quad (7.14)$$

где  $I$  - момент инерции вращающихся частей робота;

$I_{A B_o}$  - момент инерции штанги относительно оси  $z$ , проходящей через центр масс

штанги, причём  $I_{A B_o} = \frac{M l^2}{12}$ ;

$I_{B_o}$  - момент инерции “схвата” в начальном положении  $B_0$  относительно оси  $z$ ,

$$I_{B_o} = \frac{m l^2}{4}.$$

Тогда

$$L_{zo} = \left( I + \frac{M l^2}{12} + \frac{m l^2}{4} \right) \omega_o = \frac{12I + M l^2 + 3m l^2}{12} \omega_o. \quad (7.15)$$

Найдём значение кинетического момента, когда штанга выдвинется горизонтально и займёт положение АВ.

Момент инерции штанги относительно оси  $z$  будет равен:  $I_{AB} = \frac{M l^2}{3}$ , момент инерции “схвата” В относительно этой же оси  $I_B = m l^2$ . Получим значение кинетического момента системы в этот момент:

$$L_{z_1} = \left( I + \frac{M l^2}{3} + m l^2 \right) \omega_1 = \frac{3I + M l^2 + 3m l^2}{3} \omega_1. \quad (7.16)$$

Приравнивая выражения (7.15) и (7.16), найдём искомое значение угловой скорости:

$$\omega_1 = \frac{12I + M l^2 + 3m l^2}{12I + 4M l^2 + 12m l^2} \omega_o.$$

Для определения кинетического момента системы в положении, когда штанга повернётся в вертикальной плоскости на угол  $\alpha$ , необходимо вычислить момент инерции штанги АВ.

Проведём ось  $x$  вдоль оси штанги АВ и выделим элемент штанги длиной  $dx$ , отстоящий от точки А на расстоянии  $x$ , обладающий элементарной массой  $dm$ , причём  $dm = \gamma \cdot dx$ , где  $\gamma$  - плотность. Тогда момент инерции штанги относительно оси  $z$  будет равен

$$I_{AB} = \sum dm \cdot x^2 \cos^2 \alpha = \sum \gamma \cdot \cos^2 \alpha x^2 dx,$$

откуда

$$I_{AB} = \int_0^l \gamma \cdot \cos^2 \alpha x^2 dx = \frac{M}{l} \cos^2 \alpha \frac{l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3} \cos^2 \alpha.$$

Момент инерции “схвата” В относительно оси z:  $I_B^z = ml^2 \cos^2 \alpha$ , где  $a = l \cdot \cos \alpha$  - расстояние “схвата” до оси вращения.

Тогда кинетический момент работа в этом положении будет равен

$$L_{z2} = (I + \frac{Ml^2}{3} \cos^2 \alpha + ml^2 \cos^2 \alpha) \omega_2. \quad (7.17)$$

Приравнявая выражения (6.15) и (6.17), получим:

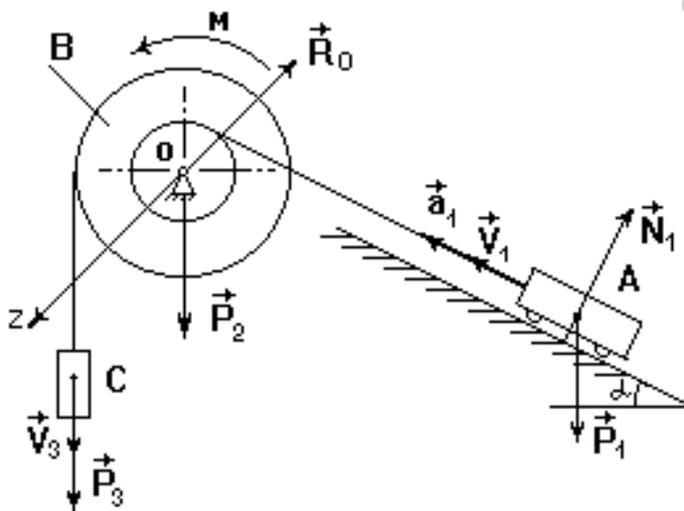
$$\frac{12I + Ml^2 + 3ml^2}{12} \omega_0 = \frac{3I + (M + 3m)l^2 \cos^2 \alpha}{3} \omega_2,$$

откуда окончательно

$$\omega_2 = \frac{12I + Ml^2 + 3ml^2}{12I + 4(M + 3m)l^2 \cos^2 \alpha} \omega_0.$$

### Пример 7.3

Вагонетка А массы  $m_1$  поднимается по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, при помощи нерастяжимого троса, намотанного на ступень



радиуса  $r$  двухступенчатого ворота В массой  $m_2$  и имеющего радиус инерции  $\rho$  относительно оси вращения О. На ступень ворота радиуса  $R$  намотан другой нерастяжимый трос, к концу которого подвешен противовес С массы  $m_3$ . Ворота приводятся в движение постоянным вращающим моментом  $M$ . Определить ускорение  $a$  вагонетки (рис. 7.7).

### Решение

Проведём ось  $z$  через точку О перпендикулярно плоскости, в которой расположен ворот. Изобразим внешние силы, действующие на систему: силы тяжести  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$ ,  $\vec{P}_3$  вагонетки, ворота и груза С соответственно, пару сил с вращающим моментом  $M$ , реакцию  $\vec{N}_1$  наклонной плоскости, реакцию  $\vec{R}_O$  шарнира О. К решению задачи применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси  $z$ :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z \left( \vec{F}_k \right) = M_z^e. \quad (7.18)$$

Определим сумму моментов внешних сил относительно оси  $z$ :

$$\sum m_z \left( \vec{F}_k \right) = M + P_3 \cdot R - P_1 r \cdot \sin \alpha.$$

Учитывая, что  $P_1 = m_1 g$ ,  $P_3 = m_3 g$ , получим:

$$\sum m_z \left( \vec{F}_k \right) = M + g(m_3 R - m_1 r \sin \alpha). \quad (7.19)$$

Кинетический момент системы относительно оси  $Z$ :

$$L_z = L_z^C + L_z^B + L_z^A,$$

где  $L_z^C$  - кинетический момент груза С;

$L_z^B$  - кинетический момент ворота;

$L_z^A$  - кинетический момент вагонетки А.

Кинетический момент груза С

$$L_z^C = m_3 V_3 \cdot R, \text{ так как } V_3 = \omega \cdot R, \text{ то } L_z^C = m_3 R^2 \cdot \omega.$$

Кинетический момент ворота В, вращающегося вокруг неподвижной оси  $z$ :

$$L_z^B = I_z \cdot \omega = m_2 \rho^2 \omega.$$

Кинетический момент вагонетки А, движущейся поступательно:

$$L_z^A = m_1 V_1 \cdot r, \text{ или, учитывая, что } V_1 = \omega \cdot r, \text{ получим: } L_z^A = m_1 r^2 \cdot \omega.$$

Тогда кинетический момент системы примет вид:

$$L_z = m_3 R^2 \cdot \omega + m_2 \rho^2 \omega + m_1 r^2 \omega = (m_3 R^2 + m_2 \rho^2 + m_1 r^2) \omega. \quad (7.20)$$

Подставим полученные выражения (7.19) и (7.20) в уравнение (7.18):

$$\frac{d}{dt} [(m_3 R^2 + m_2 \rho^2 + m_1 r^2) \omega] = M + g(m_3 R - m_1 r \sin \alpha), \text{ или}$$

$$(m_3 R^2 + m_2 \rho^2 + m_1 r^2) \frac{d\omega}{dt} = M + g(m_3 R - m_1 r \sin \alpha). \quad (7.21)$$

Из уравнения (7.21) найдём угловое ускорение ворота:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M + g(m_3 R - m_1 r \sin \alpha)}{m_3 R^2 + m_2 \rho^2 + m_1 r^2}.$$

Окончательно, ускорение вагонетки будет равно:

$$a = \varepsilon \cdot r = \frac{M + g(m_3 R - m_1 r \sin \alpha)}{m_3 R^2 + m_2 \rho^2 + m_1 r^2} \cdot r. \quad (7.22)$$

## Глава VIII

### ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

#### 8.1. Работа силы, приложенной к материальной точке

Работой постоянной силы на прямолинейном перемещении называется скалярное произведение векторов силы и

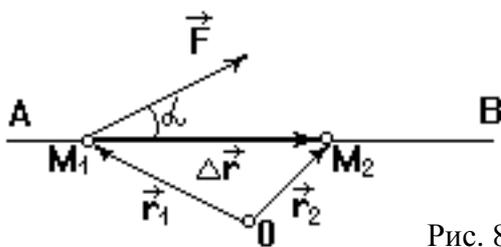


Рис. 8.1

и перемещения, т.е.  $A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ , где  $\Delta \vec{r}$  - вектор перемещения точки на участке  $M_1 M_2$  (рис. 8.1).

Иначе, работа постоянной силы на прямолинейном перемещении равна

произведению модуля силы на величину перемещения и на косинус угла между ними:

$$A = F \cdot |\Delta \vec{r}| \cos \alpha. \quad (8.1)$$

Элементарная работа переменной силы равна скалярному произведению векторов силы и элементарного перемещения:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (8.2)$$

где  $\vec{d r}$  - элементарное перемещение, которое направлено по касательной к траектории в данной точке,  $F_x, F_y, F_z$  - проекции силы на оси декартовых координат,  $dx, dy, dz$  - проекции элементарного перемещения  $\vec{d r}$  на эти же оси.

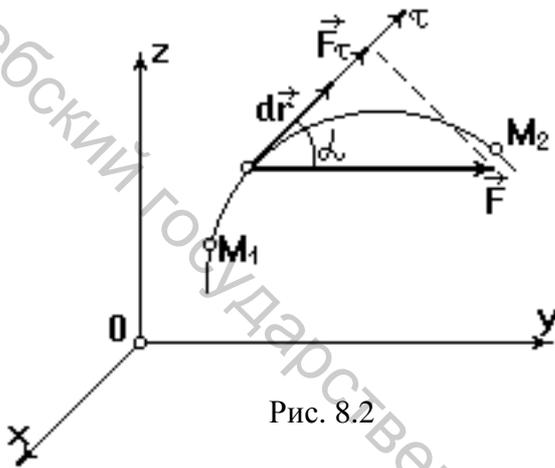


Рис. 8.2

Элементарную работу силы можно выразить иначе (рис. 8.2):

$$\delta A = \vec{F} \cdot \vec{d r} = F \cdot \left| d r \right| \cos \alpha = F_{\tau} \cdot \left| d r \right|.$$

(8.3)

Полная работа силы на конечном перемещении  $M_1 M_2$  вычисляется как предел суммы элементарных работ.

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \vec{F} \cdot \vec{d r} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

(8.4)

Таким образом, полная работа силы на конечном перемещении  $M_1 M_2$  представляет собой взятый вдоль этого перемещения криволинейный интеграл от элементарной работы.

Единицей измерения работы является 1 джоуль = 1 Н · м = 1  $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$ .

Изменение работы силы, отнесённое к единице времени, называется мощностью силы. Иначе говоря, мощность представляет собой величину, характеризующую быстроту, с какой сила совершает работу, т.е.  $N = \frac{d A}{d t}$ .

Мощность силы равна скалярному произведению векторов силы и скорости её точки приложения:

$$N = \vec{P} \cdot \vec{V} = P V \cdot \cos \left( \vec{P}, \vec{V} \right).$$

В частном случае, если сила приложена к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ , то мощность этой силы равна произведению момента силы относительно оси вращения на угловую скорость тела.

$$N = M_z(\vec{F}) \cdot \omega.$$

За единицу мощности принимается 1 ватт =  $1 \text{ Н} \cdot \text{м} / \text{с}$ .

Если на точку действует несколько сил, то работа равнодействующей этих сил на каком-либо перемещении точки равна сумме работ составляющих сил на том же перемещении.

Работа силы тяжести материальной точки равна произведению силы тяжести на разность высот конечного и начального положений точки (рис.8.3).

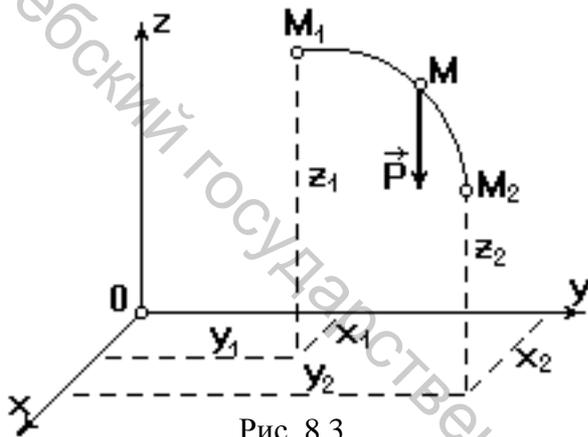


Рис. 8.3

$$A = \pm P \cdot h, \quad (8.5)$$

где  $h = |z_2 - z_1|$ .

В формуле (8.5) знак “плюс” соответствует перемещению точки вниз, а знак “минус” - перемещению точки вверх.

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории, по которой перемещается точка её приложения, а зависит лишь от расстояния между горизонтальными плоскостями, проходящими через начальное и конечное положение точки.

Работа силы упругости ( $F_x = -cx$ ) на прямолинейном перемещении по линии действия силы из точки с абсциссой  $x_1$  в точку с абсциссой  $x_2$  определяется формулой

$$A = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2). \quad (8.6)$$

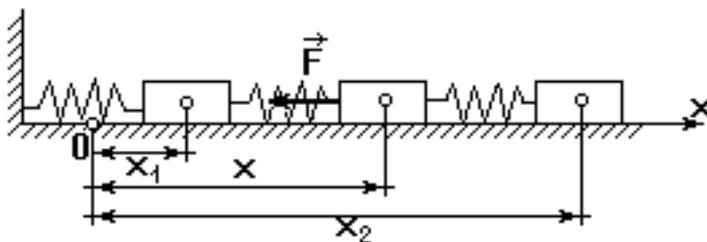


Рис. 8.4

Работа упругой силы отрицательна, если точка движется в сторону возрастания деформации пружины, и положительна, когда деформация пружины уменьшается (рис. 8.4).

Допустим, что на материальную точку  $M$  массой  $m$ , расположенную в пространстве на расстоянии  $r$  от неподвижного притягивающего центра  $C$  массой  $M$ , действует сила тяготения

$$F = k \frac{M m}{r^2}.$$

Работа силы тяготения  $\vec{F}$  при перемещении точки из положения  $M_1$  в положение  $M_2$  определяется формулой

$$A = k M m \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (8.7)$$

Как видно из формулы (8.7), работа силы тяготения не зависит от формы траектории точки.

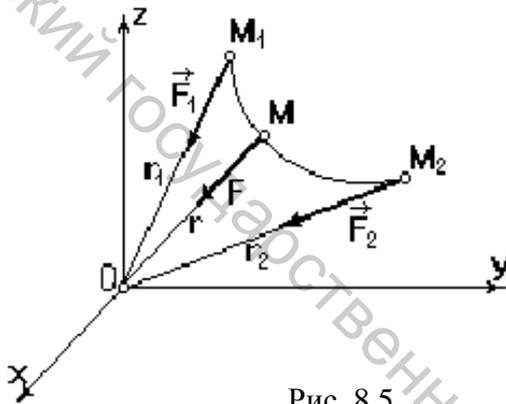


Рис. 8.5

## 8.2. Работа сил, приложенных к механической системе и к твёрдому телу

Если система сил приложена к точкам механической системы, то

элементарная работа равна сумме элементарных работ всех сил:

$$\delta A = \sum \delta A_k = \sum (F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k).$$

Тогда полная работа сил, приложенных к точкам механической системы, равна

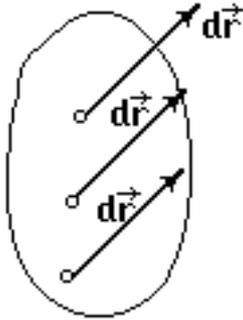
$$A = \sum_{M_{1k}}^{M_{2k}} \int (F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k),$$

где  $F_{kx}$ ,  $F_{ky}$ ,  $F_{kz}$  - проекции главного вектора сил, действующих на  $k$ -ую точку системы.

Элементарная работа сил, приложенных к твёрдому телу, определяется следующим образом:

а) при поступательном движении твёрдого тела

$$\delta A = \vec{R} \cdot d\vec{r}, \quad (8.8)$$

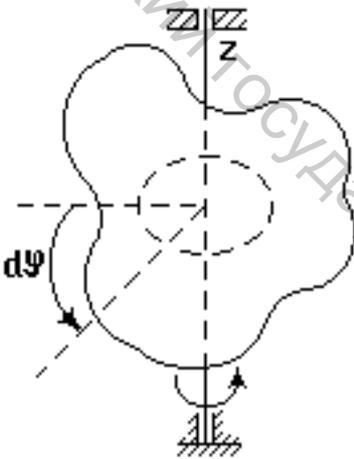


где  $\vec{R}$  - главный вектор системы сил, действующих на твёрдое тело,  $d\vec{r}$  - элементарное перемещение любой точки твёрдого тела;

б) при вращательном движении твёрдого тела вокруг неподвижной оси:

$$\delta A = m_z \cdot d\varphi, \quad (8.9)$$

где  $m_z$  - главный момент системы сил относительно оси вращения  $z$ ,  $d\varphi$  - элементарное угловое перемещение твёрдого тела;



в) твёрдое тело совершает плоскопараллельное движение:

$$\delta A = \vec{R} \cdot d\vec{r}_O + m_{zO} d\varphi, \quad (8.10)$$

где  $\vec{R}$  - главный вектор системы сил,  $d\vec{r}_O$  - элементарное перемещение полюса  $O$ ,  $m_{zO}$  - главный момент системы сил относительно оси  $z$ , проходящий через полюс  $O$  перпендикулярно неподвижной плоскости, параллельно которой движется твёрдое тело,  $d\varphi$  - элементарное угловое

перемещение твёрдого тела вокруг этой оси.

Следует иметь в виду, что элементарная работа внутренних сил неизменяемой системы

материальных точек (например, абсолютно твёрдого тела) равна нулю, т.е.  $\sum \delta A \left( \vec{F}_k \right) = 0$ .

### Пример 8.1

Рассмотрим работу сил трения качения на примерах ведущего и ведомого колеса (рис. 8.6). При движении колеса возникает деформация опорной плоскости и колеса. Для ведущего колеса деформационный валик, вызывающий смещение точки приложения

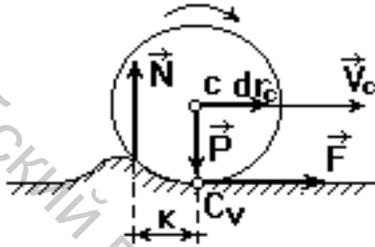


Рис. 8.6 а

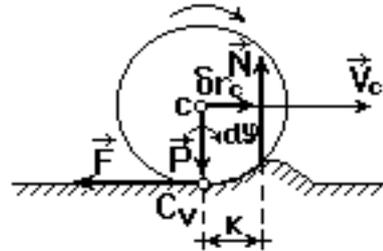


Рис. 8.6 б

нормальной реакции  $\vec{N}$  плоскости, находится слева от его центра  $C$ , если колесо движется вправо. Поэтому для этого колеса направление силы трения  $\vec{F}$  совпадает с направлением его движения (рис. 8.6 а). В ведомом колесе деформационный валик смещён относительно центра в направлении движения. Следовательно, сила трения  $\vec{F}$  в этом случае направлена в сторону, противоположную направлению движения центра колеса (рис. 8.6 б).

В обоих случаях при наличии трения качения линия действия нормальной силы  $\vec{N}$  реакции горизонтальной плоскости отстоит от линии действия силы  $\vec{P}$  на расстоянии, равном коэффициенту трения качения  $k$ . Коэффициент трения качения измеряется единицами длины. Нормальная реакция  $\vec{N}$  и вес катка  $\vec{P}$  образуют пару сил сопротивления качению с плечом  $k$ , или пару трения качения.

Момент этой пары называется моментом сопротивления качению, и для ведущего и ведомого колес отличается знаками. Величина этого момента определяется произведением нормальной реакции  $N$  на плечо пары  $k$ :

$$M_{\text{тр.к.}} = N \cdot k = P \cdot k .$$

Элементарная работа пары трения качения для ведущего колеса положительна, а для ведомого - отрицательна, т.е.

$$\delta A_{\text{тр.к.}} = \pm M_{\text{тр.к.}} \cdot d\varphi = \pm Pk \cdot d\varphi . \quad (8.11)$$

Если колеса катятся без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке касания  $C_v$  колеса с горизонтальной плоскостью, поэтому

$$dr_c = r d\varphi, \text{ и } d\varphi = \frac{dr_c}{r}.$$

Тогда получим

$$\delta A_{\text{тр.к}} = \pm \frac{Pk}{r} dr_c. \quad (8.12)$$

Для определения работы на конечном перемещении  $S$  центра масс  $C$  колёс вычислим от  $\delta A_{\text{тр.к}}$  определённый интеграл в пределах от 0 до  $S$ . Окончательно

$$A = \pm \int_0^S \frac{Pk}{r} dr_c = \pm \frac{k}{r} PS. \quad (8.13)$$

### 8.3. Теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки

Кинетическая энергия материальной точки равна половине произведения массы точки на квадрат скорости её движения:

$$T = \frac{mV^2}{2}. \quad (8.14)$$

Кинетическая энергия является мерой механического движения.

Теорему об изменении кинетической энергии материальной точки можно выразить в трёх видах:

1. Дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на эту точку:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = F \cdot \cos \alpha dS = \delta A. \quad (8.15)$$

2. Производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна мощности силы, действующей на эту точку:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mV^2}{2} \right) = \frac{dA}{dt} = N. \quad (8.16)$$

3. Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором её перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на эту точку сил на этом же перемещении:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A \left( \vec{F}_k \right). \quad (8.17)$$

Равенства (8.15) и (8.16) аналитически выражают теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме, а равенство (8.17) выражает теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной или конечной форме.

Задачи с помощью теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки рекомендуется решать в следующей последовательности:

1. изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке, т.е. задаваемые силы и реакции связей;
2. вычислить сумму работ всех сил, приложенных к материальной точке, на её перемещении;
3. вычислить кинетическую энергию материальной точки в её начальном и конечном положениях;
4. используя результаты пунктов 2, 3, применить теорему об изменении кинетической энергии материальной точки и определить искомую величину.

#### Пример 8.2

Падение тела  $M$  внутри Земли в стволе очень глубокой шахты происходит под действием силы, прямо пропорциональной расстоянию тела до центра Земли. Найти скорость тела в зависимости от пройденного пути  $x$ , если тело падает с поверхности Земли без начальной скорости и сопротивление отсутствует.

#### Решение

На тело  $M$  действует сила  $\vec{F}$ , проекция которой на вертикальную ось  $x$  в произвольном положении тела  $M$  выражается так:

$$F_x = k(R - x),$$

где  $k$ -коэффициент пропорциональности.

При  $x=0$  имеем:  $F_x = kR = mg$  ( $g$ - ускорение тела

на поверхности Земли). Отсюда  $k = \frac{mg}{R}$  и,

следовательно,  $F_x = \frac{mg}{R}(R - x)$ .

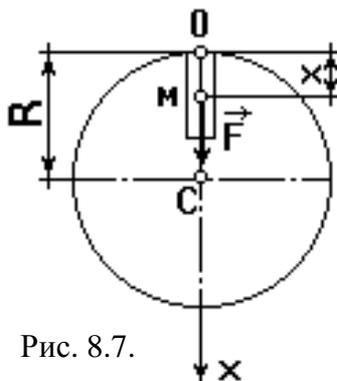


Рис. 8.7.

В тех случаях, когда действующая на тело сила постоянна или является функцией расстояния, удобно применять теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме.

Имеем:  $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_0^x F_x dx$ , или

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_0^x \frac{mg}{R}(R-x) dx = mgx \left(1 - \frac{x}{2R}\right).$$

Учитывая, что  $V_0 = 0$ , окончательно получим:

$$V = \sqrt{2gx \left(1 - \frac{x}{2R}\right)}.$$

### Пример 8.3

Вагон весом  $Q$ , получивший начальную скорость  $V_0$ , испытывает сопротивление

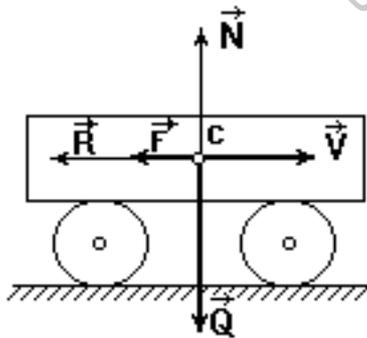


Рис. 8.8

воздуха, пропорциональное квадрату скорости, причём коэффициент сопротивления равен  $k$ .

Определить путь, пройденный вагоном до остановки, если коэффициент общего трения равен  $f$  (рис.8.8).

#### Решение

На вагон действуют следующие силы: вес

вагона  $\vec{Q}$ , нормальная реакция рельс  $\vec{N}$ , сила трения  $\vec{F}$  и сила сопротивления  $\vec{R} = -k \cdot V^2$ .

Значение силы трения:  $F_{\text{тр}} = f N = f Q$ . Проекция равнодействующей этих сил на горизонтальную ось выразится так:

$$F_x = -F - R = -(fQ + kV^2).$$

В том случае, когда действующая на точку сила является функцией скорости, теорему об изменении кинетической энергии следует применять в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \delta A = F_x dx, \text{ или}$$

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = -(fQ + kV^2) dx.$$

Разделив переменные, получим:  $-\frac{mV dV}{fQ + kV^2} = dx$ .

Отсюда получим искомую величину:

$$x = - \int_{V_0}^0 \frac{mV dV}{fQ + kV^2} = \frac{Q}{2gk} \ln \left( 1 + \frac{kV_0^2}{fQ} \right).$$

#### 8.4. Кинетическая энергия механической системы. Кинетическая энергия твёрдого тела в частных случаях его движения

Кинетическая энергия механической системы складывается из кинетических энергий всех точек, входящих в данную систему:

$$T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}. \quad (8.18)$$

Кинетическая энергия механической системы в общем случае её движения определяется теоремой Кенига:

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы, масса которого равна массе всей системы, и кинетической энергии этой системы в её относительном движении относительно центра масс, т.е.

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \sum \frac{m_k V_{kr}^2}{2}, \quad (8.19)$$

( $V_{kr}$  - относительная скорость k-ой материальной точки по отношению к центру масс).

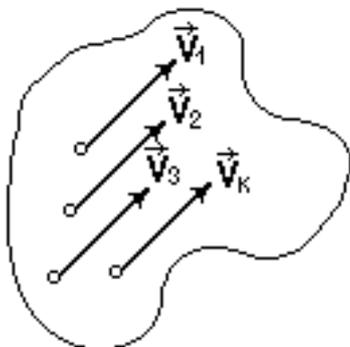
Рассмотрим вычисление кинетической энергии твёрдого тела в частных случаях его движения:

а) твёрдое тело совершает поступательное движение:

$$T = \frac{1}{2} M V^2, \quad (8.20)$$

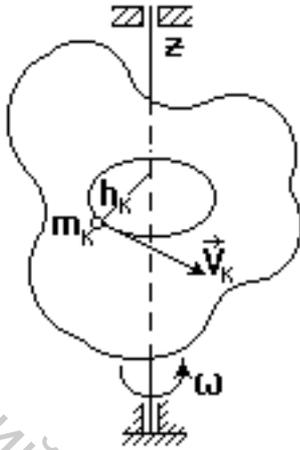
где  $M$  - масса твёрдого тела,  $V$  - скорость любой его точки;

б) твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси:



$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (8.21)$$

где  $I_z$  - момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения  $z$ ,  $\omega$  - угловая скорость вращения твёрдого тела.

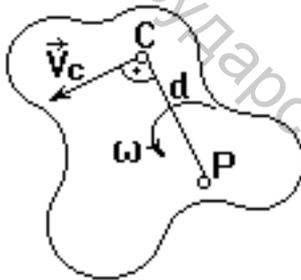


в) твёрдое тело совершает плоскопараллельное

движение:

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2, \quad (8.22)$$

где  $M$  - масса твёрдого тела,  $V_C$  - скорость его центра масс, который принят за полюс,  $I_{zC}$  - момент инерции твёрдого тела относительно оси  $z$ , проходящий через центр масс перпендикулярно к неподвижной плоскости,  $\omega$  - мгновенная угловая скорость вращения твёрдого тела.



Кинетическую энергию твёрдого тела в этом случае можно так же вычислить по формуле

$$T = \frac{1}{2} I_{zP} \omega^2, \quad (8.23)$$

где  $I_{zP}$  - момент инерции твёрдого тела относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно неподвижной плоскости. В этом случае момент инерции определяется по теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$I_P = I_{zC} + M d^2. \quad (8.24)$$

### 8.5. Теоремы об изменении кинетической энергии механической системы

Теорему об изменении кинетической энергии механической системы можно выразить в трёх формах:

1. Дифференциал кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему:

$$dT = \sum \delta A_K^e + \sum \delta A_K^i, \quad (8.25)$$

где  $\sum \delta A_K^e$  - сумма элементарных работ внешних сил, действующих на систему,  $\sum \delta A_K^i$  - сумма элементарных работ внутренних сил.

2. Производная по времени от кинетической энергии системы равна мощности всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему:

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_K^e + \sum N_K^i. \quad (8.26)$$

3. Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на материальные точки системы на этом перемещении:

$$T - T_0 = \sum A_K^e + \sum A_K^i. \quad (8.27)$$

Учитывая, что сумма работ внутренних сил твёрдого тела на любом перемещении равна нулю, уравнение (8.27) принимает вид:

$$T - T_0 = \sum A_K^e. \quad (8.28)$$

Изменение кинетической энергии твёрдого тела на некотором перемещении равно сумме работ внешних сил, действующих на тело на этом перемещении.

Равенства (8.25), (8.26) выражают теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, а равенства (8.27), (8.28) - теорему об изменении кинетической энергии в интегральной или конечной форме.

Теорему об изменении кинетической энергии следует применять в тех случаях, когда движущаяся система является неизменной, т.е. расстояния между точками системы остаются неизменными. Частным случаем такой системы является абсолютно твёрдое тело.

Эту теорему целесообразно применять в тех случаях, когда в число данных и искомым величин входят массы или моменты инерции тел, скорости (линейные или угловые), а силы и моменты пар сил либо постоянны, либо зависят от положений точек тела.

Для решения задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы рекомендуется соблюдать следующую последовательность:

1. Изобразить систему в текущий момент времени и показать на рисунке все внешние и внутренние силы, действующие на систему (при неизменяемой системе - только внешние силы).

2. Записать теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной или интегральной форме. Следует учесть, что если в число искомым величин входят линейные и угловые скорости ( $V, \omega$ ), то применяют формулы (8.27) или (8.28), а если

искомыми величинами являются линейные или угловые ускорения ( $a, \mathcal{E}$ ), то следует применять формулы (8.25) или (8.26).

3. Вычислить кинетическую энергию системы материальных точек в начальном и конечном положениях.

4. Вычислить сумму работ всех внешних и внутренних сил на перемещениях точек системы (в случае неизменяемой механической системы - только сумму работ внешних сил).

5. Воспользовавшись результатами вычислений пунктов 3 и 4 составить уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы.

6. Из полученного уравнения определить искомые величины.

#### Пример 8.4

Два однородных цилиндрических катка радиуса  $r$  и массы  $m$  каждый, оси которых шарнирно связаны однородным стержнем  $AB$  длины  $l = 2\sqrt{2}r$  и массы  $m_3 = 0,5m$ , могут катиться без скольжения внутри цилиндра радиуса  $R = 3r$  с горизонтальной образующей. Определить, пренебрегая трением качения, скорости осей катков в тот момент, когда стержень  $AB$  займёт горизонтальное положение, если в начальный момент катки отведены в положение, указанное на рисунке, и отпущены без начальной скорости (рис.8.9).

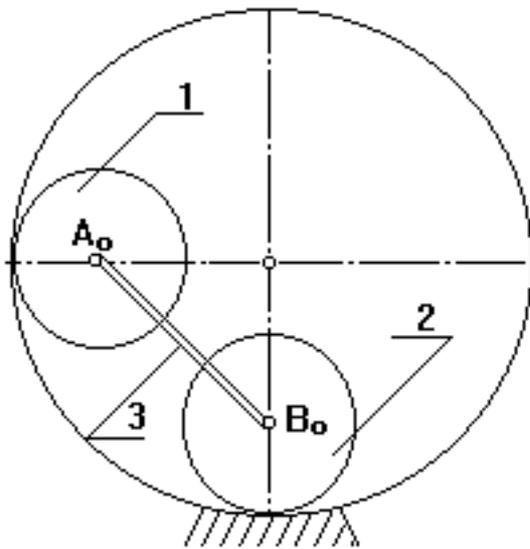
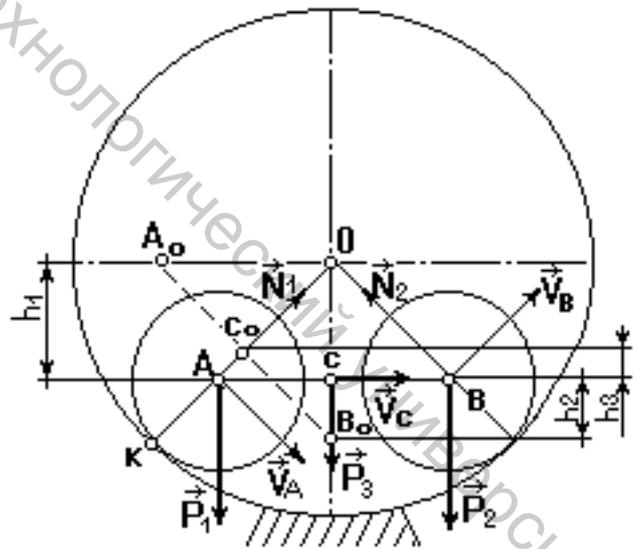


Рис. 8.9



#### Решение

К решению задачи применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы

$$T - T_0 = \sum A_K^e. \quad (8.29)$$

На рис.8.9 изображено начальное положение системы, на рис.8.10 - конечное положение. Учитывая, что в начальный момент скорости центров масс катков равны нулю, получим, что  $T_0=0$ .

Изобразим внешние силы, действующие на систему: силы тяжести  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$  катков и стержня АВ соответственно,  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  - нормальные силы реакции неподвижной цилиндрической поверхности.

Определим значение кинетической энергии системы в конечном положении:

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (8.30)$$

где  $T_1, T_2$  - кинетическая энергия катков, причём  $T_1 = T_2$ , так как радиусы катков одинаковы и их массы равны, скорости центров масс катков одинаковы, т.е.  $V_A = V_B$ .

Каток совершает плоскопараллельное движение, поэтому  $T_1 = T_2 = \frac{mV_A^2}{2} + \frac{I_1 \cdot \omega_1^2}{2}$ .

Момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс А катка:

$$I_1 = \frac{mr^2}{2}.$$

Точка К является мгновенным центром скоростей катка, поэтому  $\omega_1 = \frac{V_A}{AK} = \frac{V_A}{r}$ .

Тогда

$$T_1 = \frac{mV_A^2}{2} + \frac{mr^2}{4} \cdot \frac{V_A^2}{r^2} = \frac{3}{4}mV_A^2. \quad (8.31)$$

Кинетическую энергию стержня АВ, совершающего плоскопараллельное движение, вычислим двумя способами:

1-ый способ.

Вычислим кинетическую энергию стержня по формуле

$$T_3 = \frac{I_{zO} \cdot \omega_3^2}{2},$$

где  $I_{zO}$  - момент инерции стержня относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей О стержня (точка О является мгновенным центром скоростей стержня АВ),  $\omega_3$  - угловая скорость стержня.

Момент инерции стержня АВ определим по теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$I_{zO} = I_{z'C} + m_3(OC)^2.$$

Точка С - центр масс стержня,  $I_{z'c} = \frac{m_3 l^2}{12} = \frac{mr^2}{3}$ ,  $OC = AO \sin 45^\circ = r\sqrt{2}$ .

Тогда  $I_{zo} = \frac{mr^2}{3} + \frac{m}{2} \cdot 2r^2 = \frac{4}{3}mr^2$ .

Угловая скорость стержня  $\omega_3 = \frac{V_A}{AO} = \frac{V_A}{2r}$ .

Получим, что

$$T_3 = \frac{4}{6}mr^2 \cdot \frac{V_A^2}{4r^2} = \frac{mV_A^2}{6}. \quad (8.32)$$

2-ой способ.

Кинетическую энергию стержня АВ можно также вычислять по формуле

$$T = \frac{m_3 V_C^2}{2} + \frac{I_{zc} \cdot \omega_3^2}{2},$$

где  $V_C$  - скорость центра масс стержня,  $I_{zc}$  - момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс стержня,  $\omega_3$  - мгновенная угловая скорость стержня.

Скорость  $\bar{V}_C$  центра масс стержня перпендикулярна отрезку ОС, соединяющему точку С с мгновенным центром скоростей О стержня. В данном положении  $\bar{V}_C$  направлен вдоль отрезка АВ. Численно скорость  $V_C$  можно выразить через искомую скорость  $V_A$ , спроектировав скорости точек А и С на прямую АС:  $V_C = V_A \cos 45^\circ$ ,  $V_C = V_A \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Момент инерции стержня  $I_{zc} = \frac{m_3 l^2}{12} = \frac{mr^2}{3}$ .

Угловая скорость  $\omega_3 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{2r}$ .

Тогда

$$T_3 = \frac{m}{4} \cdot \frac{V_A^2}{2} + \frac{mr^2}{6} \cdot \frac{V_A^2}{4r^2} = \frac{mV_A^2}{6}.$$

Подставляя значения (8.31), (8.32) в уравнение (8.30) и учитывая, что  $T_1 = T_2$ , получим:

$$T = \frac{3}{2}mV_A^2 + \frac{mV_A^2}{6} = \frac{5}{3}mV_A^2. \quad (8.33)$$

Перейдём теперь к вычислению работы сил тяжести при перемещении стержня АВ в горизонтальное положение.

Работа силы тяжести  $\bar{P}_1$  первого катка  $A(\bar{P}_1) = P_1 \cdot h_1$ , где  $h_1 = OC = r\sqrt{2}$ .

Работа силы тяжести  $\bar{P}_2$  катка 2 отрицательна, так как сила тяжести  $\bar{P}_2$  и перемещение точки В приложения этой силы противоположны по направлению:  $A(\bar{P}_2) = -P_2 h_2$ , где  $h_2 = B_0O - OC = 2r - r\sqrt{2}$ .

Работа силы тяжести  $\bar{P}_3$  стержня АВ:  $A(\bar{P}_3) = P_3 h_3$ ,

где  $h_3 = OC - OC_0 \cdot \sin 45^\circ = r\sqrt{2} - r$ .

Работа сил  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$  равны нулю, так как линии действия этих сил проходят через мгновенные центры скоростей катков.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum A_k^e &= A(\bar{P}_1) + A(\bar{P}_2) + A(\bar{P}_3) = P_1 h_1 - P_2 h_2 - P_3 h_3 = mgr\sqrt{2} - mgr(2 - \sqrt{2}) + \\ &+ \frac{mgr}{2}(\sqrt{2} - 1) = \frac{5}{2}mgr(\sqrt{2} - 1). \end{aligned} \quad (8.34)$$

Подставляя выражения (8.33) и (8.34) в уравнение (8.29) получим:

$$\frac{5}{3}mV_A^2 = \frac{5}{2}mgr(\sqrt{2} - 1).$$

Окончательно,

$$V_A = V_B = \sqrt{\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)gr}.$$

Рассмотренные в главах VI, VII и VIII уравнения общих теорем динамики точки и механической системы для большей наглядности приведем в таблицах 5 и 6.

Таблица 5

Названия общих теорем динамики материальной точки	Уравнения, выражающие общие теоремы динамики точки		
	в дифференциальной форме		в конечной форме
Теорема о количестве движения	$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}$	$d(m\vec{V}) = \vec{F} dt = d\vec{S}$	$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \vec{S}$
Теорема о моменте количества движения	$\frac{d}{dt} M_o(\vec{mV}) = M_o(\vec{F})$	$d M_o(\vec{mV}) = M_o(\vec{F}) dt$	$M_o(m\vec{V}) - M_o(m\vec{V}_0) = \int_{t_0}^t M_o(\vec{F}) dt$
Теорема о кинетической энергии	$\frac{d}{dt} \left( \frac{mV^2}{2} \right) = \vec{F} \cdot \vec{V} = N$	$d \left( \frac{mV^2}{2} \right) = \vec{F} \cdot \vec{V} \cdot dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \delta A$	$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A$

Таблица 6

Названия общих теорем динамики механической системы	Уравнения, выражающие общие теоремы динамики системы		
	в дифференциальной форме		в конечной форме
Теорема о количестве движения	$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = \vec{R}^e$	$d\vec{K} = \vec{R}^e \cdot dt = d\vec{S}^e$	$\vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{S}^e$
Теорема о кинетическом моменте	$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^e$	$d\vec{L}_o = \vec{M}_o^e \cdot dt$	$\vec{L}_o - \vec{L}_o^{(0)} = \int_{t_0}^t \vec{M}_o^e dt$
Теорема о кинетической энергии	$\frac{dT}{dt} = N$	$dT = \delta A$	$T - T_0 = A$

Из таблицы 6 видно, что представленные теоремы выражаются одинаковыми по структуре уравнениями. Эти уравнения вполне аналогичны тем, которые приведены в таблице 5 для материальной точки. Уравнения, выражающие общие теоремы динамики системы, являются результатом суммирования соответствующих уравнений для отдельных точек системы.

## Глава IX

### ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

#### 9.1. Силовое поле. Потенциальное силовое поле

Среди сил разнообразной природы, с которыми мы встречаемся в теоретической механике, особое место занимает класс сил, величина и направление которых зависит только от положения точек механической системы. Примером таких сил может служить сила тяготения двух точечных масс, обратно пропорциональная квадрату расстояния между этими массами и, следовательно, зависящая от их взаимного расположения.

Силовым полем называется физическое пространство, удовлетворяющее условию, при котором на точки механической системы, находящейся в этом пространстве, действуют силы, зависящие только от положения этих точек или от положения точек и времени.

Силовое поле, силы которого не зависят от времени, называется стационарным.

Будем рассматривать стационарные силовые поля, когда проекции силы являются функциями только координат:

$$F_x = F_x(x, y, z), \quad F_y = F_y(x, y, z), \quad F_z = F_z(x, y, z).$$

Силовое стационарное поле называется потенциальным, если работа сил поля, действующих на механическую систему, не зависит от формы траекторий её точек и определяется только их начальным и конечным положениями.

Эти силы называются силами, имеющими потенциал, или консервативными силами.

Приведённое условие выполняется, если существует однозначная функция координат

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n), \quad (9.1)$$

называемая силовой функцией поля, частные производные от которой по координатам любой точки  $M_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) равны проекциям приложенной к этой точке силы на соответствующие оси:

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}, F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}, F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}. \quad (9.2)$$

Элементарная работа сил потенциального поля равна полному дифференциалу силовой функции, т.е.

$$\delta A = dU. \quad (9.3)$$

Работа сил поля на конечном перемещении механической системы из положения (1) в положение (2)

$$A_{1,2} = \int_{(1)}^{(2)} dU = U_2 - U_1, \quad (9.4)$$

т.е. работа сил, действующих на точки механической системы в потенциальном поле, равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях системы и не зависит от формы траекторий точек этой системы.

Отсюда следует, что на замкнутом пути работа силы, имеющей потенциал, равна нулю.

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0,$$

где  $\oint$  означает криволинейный интеграл, взятый по замкнутому контуру.

## 9.2. Потенциальная энергия

Потенциальная энергия материальной точки определяется работой, которую совершает сила консервативного поля при перемещении этой точки из данного положения в нулевое.

Потенциальная энергия зависит от положения точки:

$$\Pi = \Pi(x, y, z). \quad (9.5)$$

Потенциальная энергия системы материальных точек является функцией от координат всех  $n$  точек системы, т.е.

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n).$$

Из определения потенциальной энергии системы следует, что в нулевом положении её значение равно нулю:  $\Pi_0 = 0$ .

Работа сил, приложенных к точкам механической системы, на любом её перемещении равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях системы.

$$A_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (9.6)$$

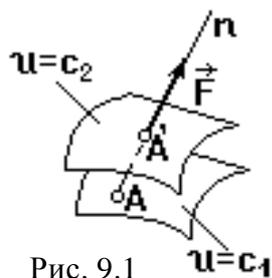
Элементарная работа потенциальной силы равна полному дифференциалу потенциальной энергии, взятой с обратным знаком:

$$\delta A = -d\Pi. \quad (9.7)$$

На основании формулы (9.2) получим:

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}. \quad (9.8)$$

Геометрическое место точек, в которых потенциальная энергия сохраняет постоянное значение, называется поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью:  $\Pi(x, y, z) = C$ .



Сила, действующая в потенциальном поле, направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности в данной точке в сторону убывания потенциальной энергии.

## Пример 9.1

Потенциальная энергия в поле силы тяжести.

Рассмотрим материальную точку, находящуюся в поле силы тяжести.

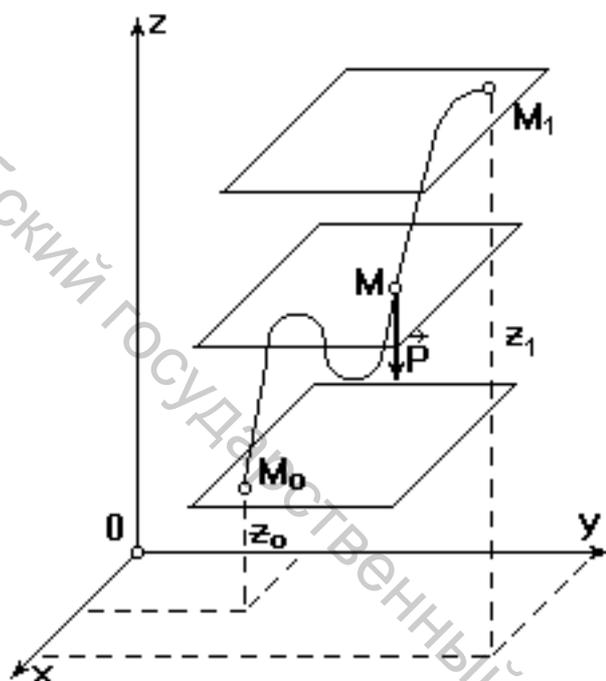


Рис. 9.2.

Обозначая вес точки через  $\vec{P}$  и направляя ось  $z$  вертикально вверх (рис. 9.2), имеем:  
 $F_x = 0, F_y = 0, F_z = -P.$

Следовательно, элементарная работа силы тяжести выражается так:

$$\delta A = dU = -P dz.$$

Пусть точка переместилась из положения  $M_0$  в положение  $M_1$ , тогда

$$A = - \int_{z_0}^{z_1} P dz = -P(z_1 - z_0) = \pm Ph$$

(9.9)

где  $h$  - абсолютная величина вертикального перемещения.

Потенциальная энергия точки

$$d\Pi = -dU = P dz,$$

откуда

$$\Pi = Pz + C,$$

где  $C$  - произвольная постоянная интегрирования.

Примем за нулевую эквипотенциальную поверхность координатную плоскость  $xy$  ( $z=0$ ).

Тогда  $C=0$  и потенциальная энергия точки

$$\Pi = Pz. \quad (9.10)$$

Уравнения эквипотенциальных поверхностей имеют вид:

$$Pz = \text{const}, \text{ или } z = \text{const},$$

т.е. эквипотенциальные поверхности поля силы тяжести представляют собой горизонтальные плоскости.

Сила тяжести направлена перпендикулярно к этим плоскостям в сторону уменьшения значения потенциальной энергии.

### Пример 9.2

Потенциальная энергия упругой силы при растяжении или сжатии.

Величина силы упругости пружины  $F=cx$ , где  $x$  - удлинение пружины,  $C$  - жёсткость пружины (рис.9.3). Тогда  $F_x = -cx$ .

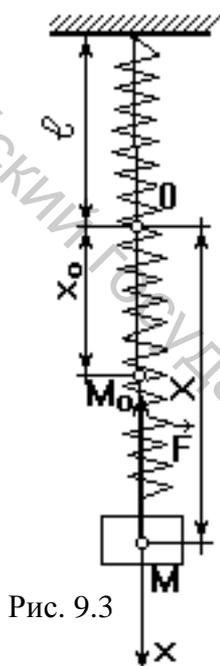


Рис. 9.3

Отсюда

$$\delta A = dU = -cx dx, \text{ или}$$

$$A = - \int_{x_0}^x cx dx = -\frac{c}{2}(x^2 - x_0^2).$$

Потенциальная энергия пружины

$$d\Pi = -dU = cx dx.$$

Окончательно

$$\Pi = \frac{cx^2}{2} + C. \quad (9.11)$$

## Глава X

### ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

#### 10.1. Принцип Даламбера для материальной точки. Сила инерции

Уравнения движения или условие равновесия механической системы можно получить, положив в основу вместо законов Ньютона другие общие положения, называемые принципами. В ряде случаев применение этих принципов позволяет найти более эффективные методы решения соответствующих задач. Рассмотрим один из общих принципов механики, называемый принципом Даламбера.

Определим выражение принципа Даламбера для одной материальной точки.

Уравнение движения материальной точки массы  $m$  относительно инерциальной системы отсчёта под действием приложенных активных сил и реакций связей имеет вид:

$$m \vec{a} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (10.1)$$

где  $\vec{F}$  - равнодействующая активных сил,  $\vec{R}$  - равнодействующая реакций связей,  $\vec{a}$  - ускорение точки относительно инерциальной системы отсчёта (рис. 10.1). Перепишем уравнение (10.1) в виде

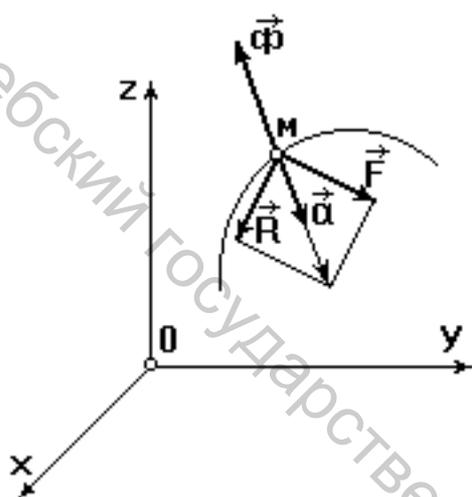


Рис. 10.1

(10.2)

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0.$$

Введём обозначение:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}.$$

Вектор  $\vec{\Phi}$ , равный по модулю произведению массы точки на её ускорение и направленный противоположно вектору ускорения, называется силой инерции.

Тогда равенство (10.2) примет вид:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0. \quad (10.3)$$

Полученное соотношение выражает принцип Даламбера для материальной точки: геометрическая сумма всех приложенных к материальной точке сил и силы инерции этой точки равна нулю.

При этом следует иметь в виду, что к материальной точке приложены только силы  $\vec{F}$  и  $\vec{R}$ , т.е. активная сила и реакция связи. Сила инерции к точке не приложена. Она является силой действия материальной точки на тело, сообщаемое ей ускорение, и приложена к этому телу.

Если точка совершает прямолинейное движение, то вектор  $\vec{\Phi}$  силы инерции материальной точки направлен противоположно вектору  $\vec{a}$  (рис. 10.2 а).

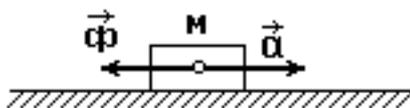


Рис. 10.2 а

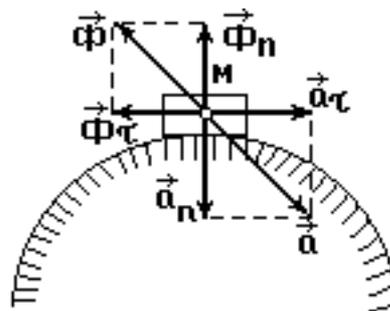


Рис. 10.2 б

Если точка движется по заданной криволинейной траектории, то её ускорение можно определить как сумму нормального и тангенциального ускорений, т.е.

$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$  (рис.10.2б). Тогда силу инерции также необходимо представить в виде двух

составляющих: нормальной  $\vec{\Phi}_n = -m\vec{a}_n$  и тангенциальной  $\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{a}_\tau$ .

Направлены эти силы инерции противоположно векторам соответствующих ускорений.

Численно нормальная составляющая силы инерции материальной точки  $\Phi_n = m \frac{V^2}{\rho}$ ,

тангенциальная составляющая силы инерции  $\Phi_\tau = m \left| \frac{dV}{dt} \right|$ .

Из векторного равенства (10.3) в проекциях на оси координат получаем три уравнения:

$$\begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x &= 0 \\ F_y + R_y + \Phi_y &= 0 \\ F_z + R_z + \Phi_z &= 0 \end{aligned} \quad (10.4)$$

Равенства (10.4) представляют собой уравнение движения материальной точки, записанное в форме условия равновесия сил. Такой метод решения задач динамики, основанный на сведении её к соответствующей задаче статики посредством условного присоединения силы инерции к силам, приложенным к материальной точке, называется методом кинестатики.

Методом кинестатики можно пользоваться при решении задач, в которых по заданному движению определяется неизвестные силы.

## 10.2. Принцип Даламбера для механической системы

Так же как и для одной материальной точки дифференциальным уравнениям движения механической системы можно придать форму уравнений статики.

Принцип Даламбера для механической системы выражается условием:

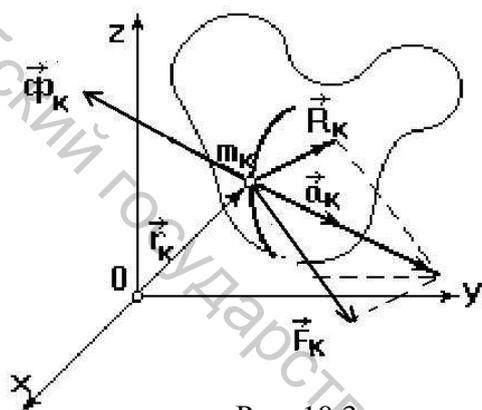


Рис. 10.3

если в любой момент времени к каждой точке системы, кроме действующих на неё сил, присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной, и к ней можно будет применять все уравнения статики, т.е.

$$\sum \vec{F}_k + \sum \vec{R}_k + \sum \vec{\Phi}_k = 0, \quad (10.5)$$

где  $\vec{F} = \sum \vec{F}_k$  - главный вектор активных сил, приложенных к системе,  $\vec{R} = \sum \vec{R}_k$  - главный вектор реакций связей,  $\vec{\Phi} = \sum \vec{\Phi}_k$  - главный вектор сил инерции. Тогда равенство (10.5) принимает вид:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0. \quad (10.6)$$

Кроме того, в каждый момент времени геометрическая сумма главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции движущейся механической системы относительно некоторого центра O должна быть равна нулю:

$$\vec{M}_O^F + \vec{M}_O^R + \vec{M}_O^\Phi = 0, \quad (10.7)$$

где  $\vec{M}_O^F = \sum m_o \left( \vec{r}_k \times \vec{F}_k \right)$  - главный момент всех активных сил, приложенных к системе;

$\vec{M}_O^R = \sum m_o \left( \vec{r}_k \times \vec{R}_k \right)$  - главный момент всех реакций связей;  $\vec{M}_O^\Phi = \sum m_o \left( \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k \right)$  - главный

момент сил инерции, причём все моменты должны быть вычислены относительно выбранного центра O.

При вычислении главных векторов  $\vec{F}$  и  $\vec{R}$  и главных моментов  $M_O^F$  и  $M_O^R$  активных сил и реакций связей неизменяемой механической системы нужно учитывать только внешние силы, так как главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю.

Двум векторным уравнениям (10.6) и (10.7) соответствуют шесть уравнений в проекциях на оси декартовых координат:

$$\left. \begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x &= 0, \\ F_y + R_y + \Phi_y &= 0, \\ F_z + R_z + \Phi_z &= 0, \\ M_x^F + M_x^R + M_x^\Phi &= 0, \\ M_y^F + M_y^R + M_y^\Phi &= 0, \\ M_z^F + M_z^R + M_z^\Phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Чтобы использовать эти уравнения при решении задач нужно знать выражения главного вектора и главного момента сил инерции.

Главный вектор сил инерции для твёрдого тела равен силе инерции его центра масс в предположении, что в нём сосредоточена масса всего тела, т.е.

$$\vec{\Phi} = -M \vec{a}_c. \quad (10.9)$$

Главный момент сил инерции равен производной по времени от кинетического момента механической системы, взятой с противоположным знаком

$$\vec{M}_O^\Phi = -\frac{d\vec{L}_O}{dt}. \quad (10.10)$$

### 10.3. Частные случаи приведения сил инерции твёрдого тела

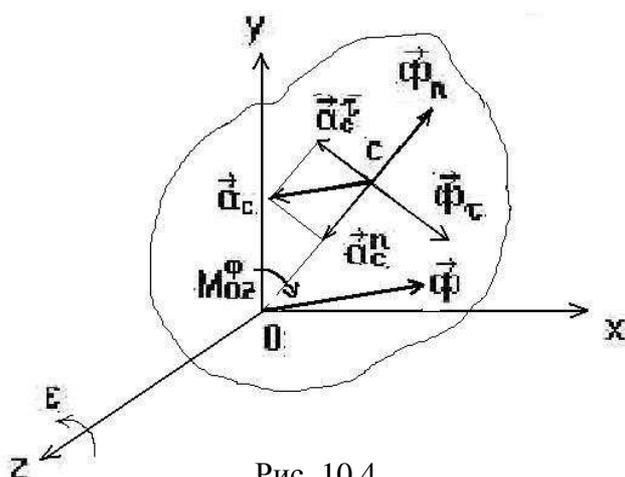


Рис. 10.4

Систему сил инерции твёрдого тела можно заменить одной силой, равной главному вектору сил инерции  $\vec{\Phi}$ , приложенной в центре масс тела, и парой с моментом, равным главному моменту сил инерции.

Рассмотрим несколько частных случаев:

1. Твёрдое тело совершает поступательное движение.

В этом случае силы инерции твёрдого тела приводятся к равнодействующей, равной главному вектору сил инерции  $\vec{\Phi}$ , проходящей через центр масс тела:

$$\vec{\Phi} = -M \vec{a}_C. \quad (10.11)$$

2. Твёрдое тело совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси.

Пусть твёрдое тело имеет плоскость материальной симметрии  $Oxy$  и вращается вокруг оси  $z$ , перпендикулярной этой плоскости. На рисунке (10.4) показано сечение тела этой плоскостью.

Если силы инерции привести к центру  $O$ , то результирующая сила инерции  $\vec{\Phi}$  и пара сил инерции будут лежать в плоскости  $Oxy$ .

Сила инерции  $\vec{\Phi}$  определяется равенством (10.9), т.е.  $\vec{\Phi} = -M \vec{a}_C$ . Если ускорение  $\vec{a}_C$  центра масс разложить на нормальную и касательную составляющие, то вектор  $\vec{\Phi}$  разложится на составляющие:

$$\vec{\Phi}_\tau = -M \vec{a}_C^\tau, \quad \vec{\Phi}_n = -M \vec{a}_C^n. \quad (10.12)$$

Нормальную составляющую сил инерции называют центробежной силой инерции.

Момент пары будет равен главному моменту сил инерции относительно оси  $z$ . Так как кинетический момент твёрдого тела, вращающегося вокруг оси  $z$ , равен  $L_z = I_z \cdot \omega$ , то по формуле (10.10) получим

$$M_{Oz}^\Phi = -\frac{dL_z}{dt} = -I_z \frac{d\omega}{dt} = -I_z \cdot \varepsilon, \quad (10.13)$$

где  $\varepsilon$  - угловое ускорение твёрдого тела.

Таким образом, система сил инерции твёрдого тела во вращательном движении приводится к силе  $\vec{\Phi}$ , определяемой формулами (10.12) и приложенной в точке  $O$  (рис. 10.4), и к паре с моментом  $M_{Oz}^\Phi$ , определяемым формулой (10.13).

Если ось вращения  $z$  проходит через  $C$  центр масс тела, то  $\vec{a}_C = 0$  и  $\vec{\Phi} = 0$ . Следовательно, в этом случае силы инерции тела приводятся к одной паре сил с моментом сил инерции, равным

$$M_{Cz}^\Phi = -I_{Cz} \cdot \varepsilon. \quad (10.14)$$

### 3. Твёрдое тело совершает плоскопараллельное движение.

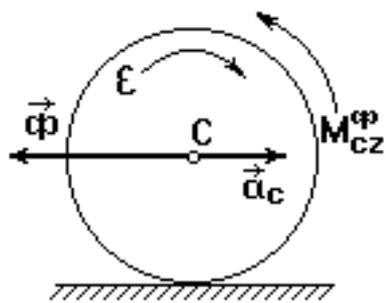


Рис. 10.5

В этом случае силы инерции приводятся к силе инерции  $\vec{\Phi}$ , равной главному вектору сил инерции и приложенной в центре масс С тела, и к паре с моментом  $M_{Cz}^{\phi} = -I_{Cz} \cdot \epsilon$ , при этом  $\vec{\Phi} = -M \vec{a}_C$ .

Момент сил инерции определяется формулой (10.14), а его направление, противоположное  $\epsilon$ ,

указывается на рисунке дуговой стрелкой (рис.10.5).

Решение задач с помощью метода кинетостатики рекомендуется выполнять в такой последовательности.

1. Изобразить механическую систему в текущий момент времени.
2. Изобразить на рисунке активные силы, действующие на систему.
3. Освободить систему от связей, заменив действие связей на систему соответствующими реакциями.
4. Добавить к активным силам и реакциям связей силы инерции материальных точек системы.
5. Выбрать систему координат.
6. Составить уравнения “равновесия” системы сил.
7. Решив полученную систему уравнений, определить искомые величины.

#### Пример 10.1

Груз массы 0,102 кг, подвешенный на нити длиной 30 см в неподвижной точке О,

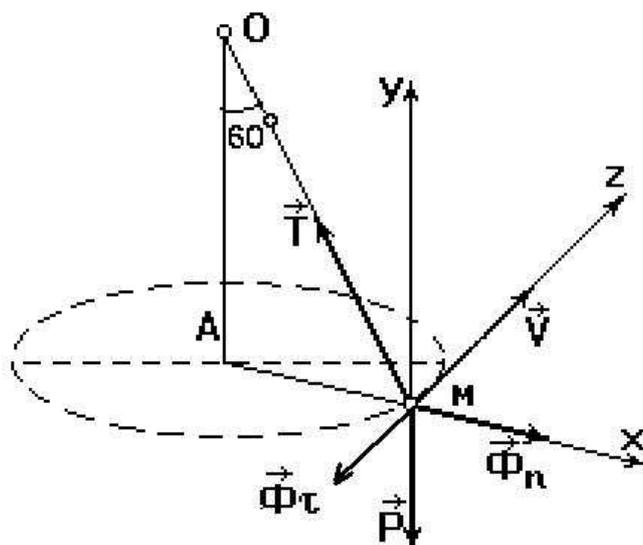


Рис. 10.6

представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причём нить составляет с вертикалью угол  $60^\circ$ . Определить скорость  $V$  груза и натяжение нити (рис.10.6).

#### Решение

Приложим к грузу действующие на него силы: вес

груза  $\vec{P}$  и реакцию нити  $T$ . Добавим к этим силам силу инерции  $\vec{\Phi}$  груза. При движении груза по окружности эту силу представим двумя составляющими:

$$\vec{\Phi}_n = -ma_n, \quad \vec{\Phi}_\tau = -ma_\tau.$$

Согласно уравнению (10.3) будем иметь:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau = 0. \quad (10.15)$$

Выбрав оси  $x, y, z$  как указано на рис. 10.6, спроектируем равенство (10.15) на оси  $x, y, z$ :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n - T \cos 30^\circ &= 0, \\ T \cos 60^\circ - P &= 0, \\ \Phi_\tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.16)$$

Последнее уравнение системы (10.16) указывает на то, что движение груза равномерное, т.е.  $V = \text{const}$ .

Из второго уравнения получим, что  $T = 2P = 2mg = 2H$ .

Численно нормальная сила инерции  $\Phi_n = m \frac{V^2}{\rho}$ , где  $\rho = AM = l \cos 30^\circ$ .

Первое уравнение будет иметь вид:  $\frac{mV^2}{l \cos 30^\circ} = 2mg \cos 30^\circ$ ,

откуда получим искомую скорость  $V = \sqrt{2lg \cos^2 30^\circ} = 2,1 \text{ м/с}$ .

### Пример 10.2

Тонкий прямолинейный однородный стержень длины  $2l$  и массы  $M$  вращается с

постоянной угловой скоростью  $\omega$  около точки  $O$  (шаровой шарнир), описывая коническую поверхность с осью  $OA$  и вершиной в точке  $O$ . Вычислить угол отклонения стержня от вертикального направления, а также реакцию шарового шарнира (рис. 10.7 а).

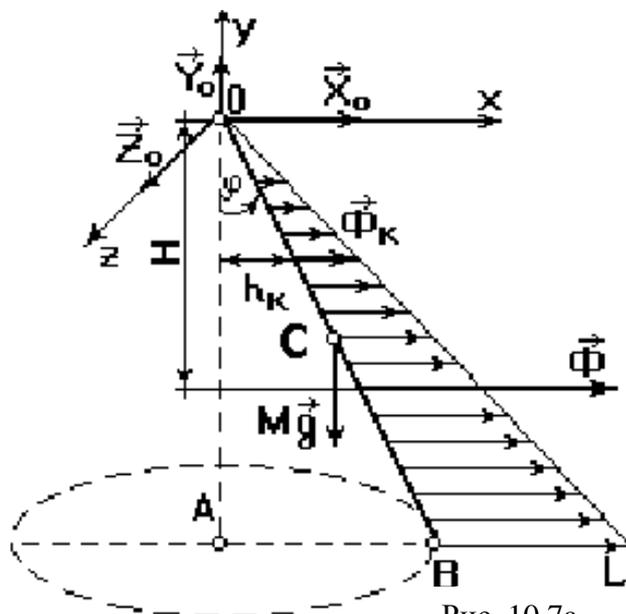


Рис. 10.7а

### Решение

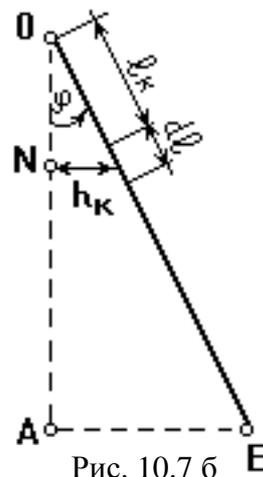
Подвижные оси  $XYZ$  свяжем с вращающимся стержнем  $AB$  так, чтобы стержень лежал в плоскости  $XY$ . Освободив стержень от связи, получим, что на стержень действуют внешние силы: сила тяжести  $M\vec{g}$ ;  $\vec{X}_O$ ,  $\vec{Y}_O$  - составляющие реакции шарнира  $O$  (третья составляющая  $Z_O = 0$ , т.к. стержень лежит в плоскости  $XY$ ). К решению задачи применим принцип Даламбера, согласно которому к внешним действующим силам необходимо добавить силу инерции стержня. Так как стержень вращается равномерно, то каждый элемент стержня будет иметь отличное от других нормальное ускорение, причём силы инерции  $\vec{\Phi}_k$  элементов стержня меняются с изменением их расстояния от оси вращения. Силы инерции  $\vec{\Phi}_k$  элементов стержня будут направлены от оси вращения  $OA$  и численно  $|\vec{\Phi}_k| = dm \cdot a_k^n = dm \cdot \omega^2 \cdot h_k$ , где  $dm$  - масса элемента стержня,  $h_k$  - расстояние элемента от оси вращения. Величина элементарной силы инерции меняется по линейному закону, а эпюра всех параллельных сил  $\vec{\Phi}_k$  образует треугольник. Тогда величина равнодействующей этих сил будет равна  $\Phi = M \cdot a_c$ , где  $M$  - масса стержня,  $a_c$  - ускорение центра масс стержня. Линия действия этой равнодействующей пройдёт через центр тяжести эпюрного треугольника  $OBL$  на расстоянии  $H$  от вершины  $O$ , где  $H = \frac{2}{3} OA$ .

Имеем, что

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= M \cdot a_c = M \omega^2 \cdot l \sin \varphi, \\ H &= \frac{2}{3} \cdot 2l \cos \varphi = \frac{4}{3} l \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (10.17)$$

Согласно принципу Даламбера силы  $M\vec{g}$ ,  $\vec{X}_O$ ,  $\vec{Y}_O$  и сила инерции  $\vec{\Phi}$  взаимно уравновешиваются. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения "равновесия":

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_O + \Phi = 0, \quad (10.18)$$



$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_O - Mg = 0, \quad (10.19)$$

$$\sum m_O \left( \vec{F}_k \right) = 0, \quad \Phi \cdot H - Mgl \sin \varphi = 0 \quad (10.20)$$

Подставим полученные выражения (10.17) в уравнение (10.20):

$$M\omega^2 l \sin \varphi \cdot \frac{4}{3} l \cos \varphi - Mgl \sin \varphi = 0,$$

или, сокращая на  $M$ ,  $l$ ,  $\sin \varphi$  (при условии, что  $\varphi \neq 0$ ), имеем:  $\cos \varphi = \frac{3g}{4l\omega^2}$ , откуда

$$\varphi = \arccos \frac{3g}{4l\omega^2}.$$

Из уравнения (10.18)

$$X_O = -\Phi = -M\omega^2 l \sin \varphi.$$

$$\text{Учитывая, что } \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left( \frac{3g}{4l\omega^2} \right)^2},$$

получим

$$X_O = -Ml\omega^2 \sqrt{1 - \frac{9g^2}{16l^2\omega^4}}.$$

Из уравнения (10.19)  $Y_O = Mg$ .

$$\text{Реакция шарового шарнира численно } R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} = Ml\omega^2 \sqrt{1 + \frac{7g^2}{16l^2\omega^4}}.$$

Силы инерции для этой задачи можно определить иным способом. Выделим на стержне  $OB$  элемент длины  $dl$  на расстоянии  $l_k$  от шарнира  $O$  (рис. 10.7 б), элементарная масса которого  $dm = \gamma \cdot dl$ , где  $\gamma$  - масса единицы длины стержня.

Сила инерции этого элемента по модулю

$$d\Phi = dm \cdot a_k^n = \gamma \cdot dl \cdot \omega^2 \cdot l_k \sin \varphi.$$

Учитывая, что  $\gamma = \frac{M}{2l}$ , получим

$$d\Phi = \frac{M}{2l} \omega^2 \sin \varphi l_k dl.$$

Тогда величина силы инерции стержня будет определяться выражением

$$\Phi = \int_0^{2l} \frac{M}{2l} \omega^2 \sin \varphi \cdot l_k dl = Ml \omega^2 \sin \varphi.$$

Величина момента элементарной силы инерции относительно центра O:

$$dM_o^\Phi = d\Phi \cdot ON = \frac{M}{2l} \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi l_k^2 dl.$$

Момент силы инерции стержня относительно центра O:

$$M_o^\Phi = \int_0^{2l} \frac{M}{2l} \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot l_k^2 dl = \frac{4}{3} Ml^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

#### 10.4. Определение динамических реакций при несвободном движении механической системы

При движении несвободного твёрдого тела реакции связей складываются из статических и добавочных динамических составляющих. Рассмотрим твёрдое тело,

вращающееся под действием приложенных к нему внешних задаваемых сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2,$

...  $\vec{F}_n$ . Заданы:  $M$  - масса твёрдого тела,  $\omega$  - угловая скорость твёрдого тела,  $\varepsilon$  - угловое ускорение твёрдого тела. Применяя принцип освобождаемости от связей, заменяем

действие на тело подпятника A и подшипника B реакциями  $\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_B$ , разложив их на

составляющие  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ .

Чтобы воспользоваться принципом Даламбера, приложим к каждой точке  $M_k$  силу

инерции  $\vec{\Phi}_k$ .

В результате приведения сил инерции к центру  $A$  получим силу, равную главному вектору  $\vec{\Phi}$ , и пару сил, момент которой равен главному моменту  $M_A^{\vec{\Phi}}$  сил инерции.

На основании принципа Даламбера внешние задаваемые силы, реакции связей и силы инерции удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}^e + \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{\Phi} &= 0, \\ \vec{M}_A^e + \vec{M}_A^{\vec{R}_A} + \vec{M}_A^{\vec{R}_B} + \vec{M}_A^{\vec{\Phi}} &= 0. \end{aligned} \right\} (10.21)$$

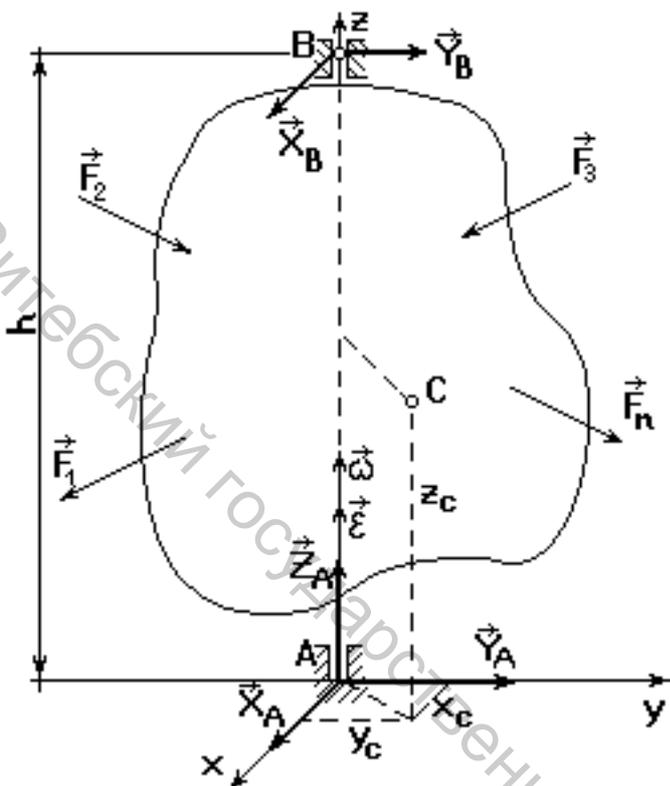


Рис. 10.8

Эти уравнения эквивалентны шести алгебраическим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx}^e + X_A + X_B + M x_c \cdot \omega^2 + M y_c \cdot \varepsilon &= 0, \\ \sum F_{ky}^e + Y_A + Y_B + M y_c \cdot \omega^2 - M x_c \cdot \varepsilon &= 0, \\ \sum F_{kz}^e + Z_A &= 0, \\ \sum M_{kx}^e - Y_B \cdot h - I_{yz} \cdot \omega^2 + I_{zx} \cdot \varepsilon &= 0, \\ \sum M_{ky}^e - X_B \cdot h + I_{zx} \cdot \omega^2 + I_{yz} \cdot \varepsilon &= 0, \\ \sum M_{kz}^e - I_z \cdot \varepsilon &= 0, \end{aligned} \right\} (10.22)$$

где  $I_{yz}$ ,  $I_{zx}$  - центробежные моменты инерции тела относительно осей  $y, z$  и осей  $z, x$ ,  
 $I_z$  - момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения  $z$ .

Последнее из уравнений (10.22) не содержит реакций опор. Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела вокруг оси  $z$ .

Из первого, второго, четвёртого и пятого уравнений (10.22) видно, что каждая из реакций имеет статическую составляющую, вызываемую действием внешних сил  $\vec{F}_k$ , и динамическую составляющую, зависящую от сил инерции.

Чтобы получить условия, при которых динамические составляющие реакций подпятника и подшипника равны нулю, приравняем нулю члены уравнений (10.22), выделенные рамками:

$$\left. \begin{aligned} M_{x_c} \cdot \omega^2 + M_{y_c} \cdot \varepsilon &= 0 \\ M_{y_c} \cdot \omega^2 - M_{x_c} \cdot \varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

$$\left. \begin{aligned} -I_{yz} \cdot \omega^2 + I_{zx} \cdot \varepsilon &= 0 \\ I_{zx} \cdot \omega^2 + I_{yz} \cdot \varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

Решая систему уравнений (10.23), имеем  $x_c=0$ ,  $y_c=0$ , т.е. центр масс твёрдого тела должен находиться на оси вращения  $z$ .

Из системы уравнений (10.24) получим:  $I_{yz}=0$ ,  $I_{zx}=0$ .

Это означает, что ось  $z$  должна быть главной центральной осью инерции твёрдого тела.

Таким образом, для того, чтобы вращающееся тело было динамически уравновешено, необходимо, чтобы оно было уравновешено статически ( $x_c=0$ ,  $y_c=0$ ), и, кроме того, его центробежные моменты инерции  $I_{yz}$  и  $I_{zx}$  должны равняться нулю.

### Пример 10.3

Однородный диск радиуса  $R$  и массы  $M$  может вращаться без трения вокруг оси  $z$ . По ободу диска перемещается с постоянной относительной скоростью  $U$  материальная точка  $D$  массы  $m$ . Определить динамические реакции подпятника  $A$  и подшипника  $B$ , если в начальный момент система находилась в покое (рис.10.9).

#### Решение

Изобразим точку  $D$  в произвольном положении так, как указано на рисунке.

Выберем подвижные оси  $x, y, z$ , связав их с вращающимся диском, направив ось  $z$  вдоль оси вращения, а ось  $y$  - параллельно отрезку  $OD$  в плоскости рисунка.

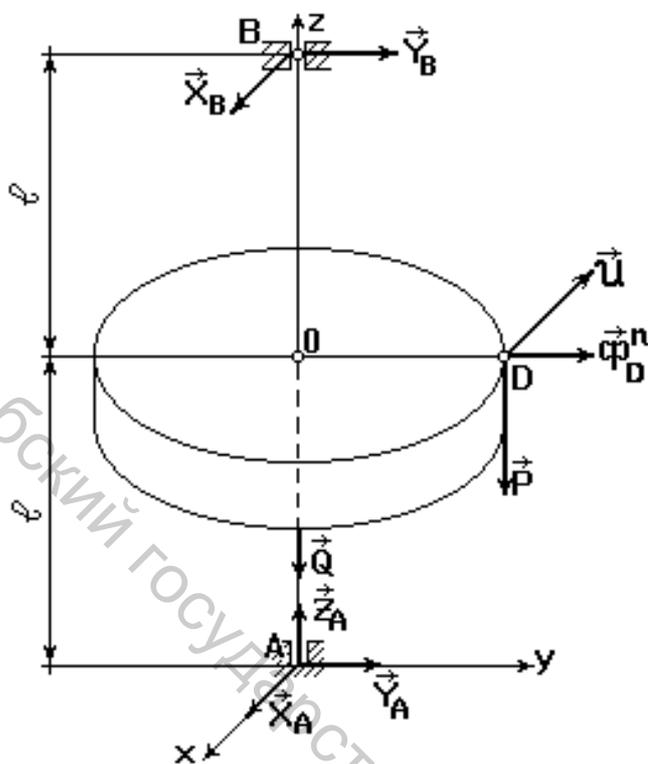


Рис. 10.9

На систему действуют внешние силы: сила тяжести  $\vec{Q}$  диска, сила тяжести  $\vec{P}$  материальной точки  $D$ , составляющие  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$  реакции подпятника  $A$ , составляющие  $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$  реакции подшипника  $B$ . Учитывая, что диск динамически уравновешен, к действующим внешним силам добавим силу инерции точки  $D$ .

Для определения угловой скорости  $\omega$  вращения диска вокруг оси  $z$  применим теорему об изменении кинетического

момента механической системы относительно оси  $z$ :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e, \text{ так как } M_z^e = 0, \text{ то } L_z = \text{const},$$

т.е. кинетический момент системы относительно оси  $z$  сохраняет постоянное значение. Учитывая, что в начальный момент система покоилась, имеем  $L_{z0} = 0$ , тогда  $L_z = 0$ .

Кинетический момент системы

$$L_z = I\omega + m(u + \omega r) \cdot r = 0, \quad (10.28)$$

где  $I\omega$  - кинетический момент диска,  $m(u + \omega r)r$  - кинетический момент точки  $D$  в сложном движении.

Из уравнения (10.28) определим  $\omega$ :

$$\omega = -\frac{mur}{I + mr^2} = \text{const}.$$

Значение  $\omega$  показывает, что вращение диска равномерное.

Абсолютная скорость точки D  $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ , или  $V = u - \frac{mur^2}{I + mr^2}$ ,

или, подставив значение момента инерции диска, получим, что

$$V = \frac{M}{M + 2m} U.$$

Так как абсолютная скорость точки D постоянна, то сила инерции этой точки будет равна нормальной составляющей:

$$\vec{\Phi}_D = \vec{\Phi}_D^n = -m a_D^n$$

$$\text{Численно } \Phi_D^n = m \frac{V^2}{r} = \frac{m M^2 U^2}{(M + 2m)r^2}.$$

Учитывая, что активные силы и сила инерции точки D лежат в плоскости Ayz, имеем, что  $X_A = X_B = 0$ .

Динамические составляющие  $Y_A$  и  $Y_B$  определим из уравнений:

$$\sum F_{ky} = 0, Y_A + Y_B + \Phi_D^n = 0 \quad (10.29)$$

$$\sum m_o(\vec{F}_k) = 0, Y_A \cdot l - Y_B \cdot l = 0, \quad (10.30)$$

Из уравнения (10.30) имеем, что  $Y_A = Y_B$ . Тогда из уравнения (10.29) получим:

$$2Y_A = -\Phi_D^n.$$

Откуда

$$Y_A = -\frac{\Phi}{2} = -\frac{m M^2 U^2}{2(M + 2m)^2 r}, Y_B = -\frac{m M^2 U^2}{2(M + 2m)^2 r}.$$

Статические реакции соответственно равны  $mgR/2l$  и  $(-mgR)/2l$ .

## Глава XI

### ДИНАМИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

#### 11.1. Дифференциальные уравнения поступательного движения твёрдого тела

При изучении динамики твёрдого тела можно выделить две основные группы задач. К первой группе задач относятся задачи, в которых по заданному движению твёрдого тела требуется определить систему сил, под действием которых происходит это движение. Ко

второй группе относятся задачи, в которых по заданным силам, действующим на твёрдое тело, требуется при определённых начальных условиях найти закон движения тела.

Дифференциальные уравнения поступательного движения твёрдого тела получаются на основе теоремы о движении центра масс

$$M \vec{a}_c = \sum \vec{F}_k = \vec{R},$$

или в проекциях на прямоугольные декартовы оси координат:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_c &= \sum F_{kx}^e = R_x^e, \\ M \ddot{y}_c &= \sum F_{ky}^e = R_y^e, \\ M \ddot{z}_c &= \sum F_{kz}^e = R_z^e, \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

где  $M$  - масса тела,  $\ddot{x}_c$ ,  $\ddot{y}_c$ ,  $\ddot{z}_c$  - проекции ускорения центра масс,  $R_x^e$ ,  $R_y^e$ ,  $R_z^e$  - проекции главного вектора внешних сил на эти оси.

Изучение поступательного движения твёрдого тела сводится к изучению движения центра масс, обладающего массой твёрдого тела.

## 11.2. Дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z \left( \vec{F}_k^e \right) = M_z^e, \quad (11.2)$$

или эквивалентное ему уравнение

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum m_z \left( \vec{F}_k^e \right) = M_z^e, \quad (11.3)$$

где  $I_z$  - момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения,  $\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt}$  - угловое

ускорение твёрдого тела,  $M_z^e = \sum m_z \begin{pmatrix} \vec{e} \\ F_k \end{pmatrix}$  - главный момент внешних сил, действующих на

твёрдое тело, относительно  $z$ .

Уравнение (11.3) по своей структуре аналогично второму закону Ньютона для материальной точки или для твёрдого тела, движущегося поступательно. Отсюда приходим к выводу, что момент инерции  $I_z$  при вращательном движении тела имеет такое же значение, что и масса тела при его поступательном движении. Следовательно, момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения является мерой инертности тела при его вращении вокруг этой оси.

Задачи динамики о вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси рекомендуется решать в такой последовательности:

- 1) выбрать оси декартовых координат, направив одну из осей (ось  $z$ ) вдоль оси вращения твёрдого тела;
- 2) изобразить на рисунке все внешние силы, приложенные к твёрдому телу;
- 3) вычислить сумму моментов внешних сил относительно оси вращения;
- 4) записать дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной

оси  $I_z \ddot{\varphi} = \sum m_z \begin{pmatrix} \vec{e} \\ F_k \end{pmatrix}$ ;

- 5) подставив в это уравнение выражение суммы моментов всех внешних сил и значение момента инерции  $I_z$  твёрдого тела относительно оси вращения, решить, в зависимости от условия, прямую или обратную задачи динамики.

#### Пример 11.1

Найти уравнение малых колебаний однородного диска массы  $M$  и радиуса  $R$ , совершающего колебания вокруг горизонтальной оси  $Oz$ , перпендикулярной его плоскости и отстоящей от центра масс  $C$  диска на расстоянии  $OC = \frac{R}{2}$ . В начальный момент диску, находившемуся в нижнем положении, была сообщена угловая скорость  $\omega_0$ . Силами сопротивления

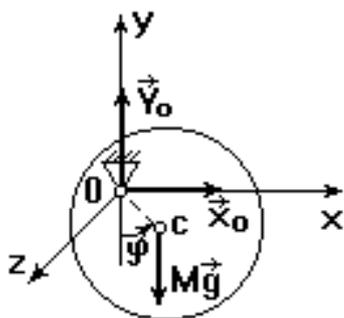


Рис. 11.1

пренебречь. Считая колебания малыми, принять  $\sin \varphi \approx \varphi$ .

### Решение

Данный диск можно рассматривать как физический маятник. Физическим маятником называется твёрдое тело, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения, не проходящую через его центр тяжести, и находящееся под действием только силы тяжести.

На диск, отклонённый от начального положения, действуют внешние силы: его вес  $\vec{P} = M \vec{g}$  и составляющие  $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$  цилиндрического шарнира  $O$ . Момент силы тяжести относительно оси  $z$

$$M_z = - M g OC \cdot \sin \varphi \approx - M g \frac{R}{2} \varphi.$$

Дифференциальное уравнение вращения диска вокруг оси  $z$  имеет вид:

$$I_z \ddot{\varphi} = - M g \frac{R}{2} \varphi, \quad (11.4)$$

где  $I_z$  - момент инерции диска относительно оси вращения.

Уравнение (10.4) можно представить в виде:

$$\ddot{\varphi} + \frac{M g R}{2 I_z} \varphi = 0. \quad (11.5)$$

Момент инерции  $I_z$  определим по теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$I_z = I_c + M \cdot (OC)^2 = \frac{M R^2}{2} + \frac{M R^2}{4} = \frac{3}{4} M R^2.$$

Подставив значение  $I_z$  в уравнение (11.5), получим:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2 g}{3 R} \varphi = 0, \text{ или } \ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (11.6)$$

где  $k = \sqrt{\frac{2 g}{3 R}}$  - частота колебаний диска.

Решение дифференциального уравнения (11.6), т.е. уравнение малых колебаний, имеет вид:

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (11.7)$$

Продифференцируем равенство (11.7) по времени:

$$\dot{\varphi} = - C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (11.8)$$

Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  запишем начальные условия: при  $t=0$   $\varphi_0 = 0$ ,

$\dot{\varphi}_0 = \omega_0$ . Подставив начальные условия в уравнение (11.7), (11.8), получим:

$$0 = C_1, \omega_0 = C_2 k, \text{ откуда}$$

$$C_1 = 0, C_2 = \frac{\omega_0}{k} = \omega_0 \sqrt{\frac{3R}{2g}}.$$

Окончательно уравнение малых колебаний примет вид:

$$\varphi = \omega_0 \sqrt{\frac{3R}{2g}} \sin \sqrt{\frac{2g}{3R}} t. \quad (11.9)$$

### Пример 11.2

Для экспериментального определения момента инерции  $I_z$  тела А относительно вертикальной оси  $Oz$  его прикрепили к упругому вертикальному стержню  $OO_1$ , закрутили этот стержень, повернув тело А вокруг оси  $Oz$  на малый угол  $\varphi_0$ , и отпустили; период возникших колебаний оказался равным  $T_1$ , момент сил упругости относительно оси  $Oz$  равен  $m_z = -C\varphi$ . Для определения коэффициента  $C$  проделали второй опыт; на стержень в точке  $O$  был надет однородный круглый диск радиуса  $r$  массы  $M$ , и тогда период колебаний оказался равным  $T_2$ . Определить момент инерции тела  $I_z$ .

### Решение

Для определения искомого момента инерции  $I_z$  тела А (рис.11.2 а), применим дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси  $z$ :

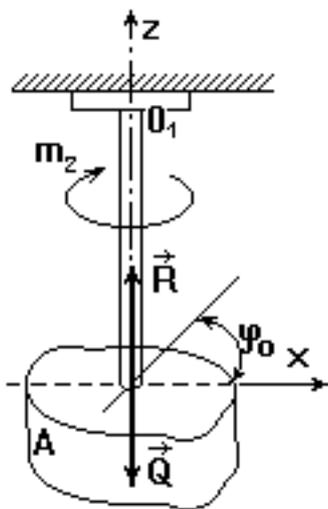


Рис. 11.2 а

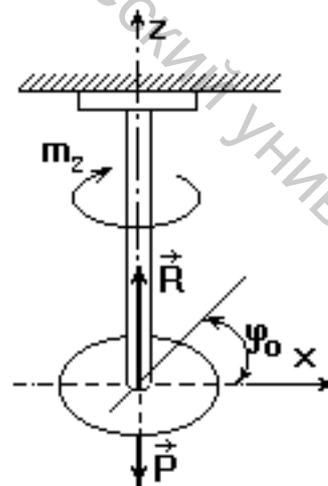


Рис. 11.2 б

$$I_z^A \ddot{\varphi} = \sum m_z \begin{pmatrix} \vec{e} \\ F_K \end{pmatrix}. \quad (11.11)$$

К телу А приложим внешние силы: вес тела  $\vec{Q}$ , реакции  $\vec{R}$  стержня  $OO_1$ , момент сил упругости  $m_z$ , направление которого противоположно направлению угла закручивания стержня  $\varphi$ . Главный момент внешних сил относительно оси z равен

$$\sum m_z \begin{pmatrix} \vec{e} \\ F_K \end{pmatrix} = m_z = -C \varphi.$$

Тогда уравнение (11.10) примет вид:

$$I_z^A \ddot{\varphi} = -C \varphi, \text{ или } \ddot{\varphi} + k_1^2 \varphi = 0,$$

где  $k_1 = \sqrt{\frac{C}{I_z^A}}$  представляет собой частоту свободных крутильных колебаний тела А.

Так как период этих колебаний известен, то частота  $k_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ .

Приравняв полученные значения  $k_1$ , имеем

$$\sqrt{\frac{C}{I_z^A}} = \frac{2\pi}{T_1}, \text{ или } \frac{C}{I_z^A} = \frac{4\pi^2}{T_1^2}. \quad (11.12)$$

Из равенства (11.12) можно найти  $I_z^A$  при условии, если известен коэффициент упругости С стержня. Для определения этого коэффициента к стержню подвешивают диск массы М и радиуса r. Применим дифференциальное уравнение вращательного движения диска вокруг неподвижной оси z:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum m_z \begin{pmatrix} \vec{e} \\ F_K \end{pmatrix}. \quad (11.13)$$

К диску приложены внешние силы: вес диска  $\vec{P}$ , реакция  $\vec{R}$  стержня  $OO_1$ , момент сил упругости  $m_z$ . Главный момент внешних сил относительно оси z имеет вид

$$\sum m_z \begin{pmatrix} \vec{e} \\ F_K \end{pmatrix} = m_z = -C \varphi.$$

Момент инерции диска относительно оси z равен  $I_z = \frac{M r^2}{2}$ .

Тогда уравнение (11.13) имеет вид:

$$\frac{M r^2}{2} \ddot{\varphi} = -C \varphi, \text{ или } \ddot{\varphi} + k_2^2 \varphi = 0,$$

где  $k_2 = \sqrt{\frac{2C}{M r^2}}$  - частота свободных крутильных колебаний диска. Зная период

колебаний  $T_2$  диска, имеем  $k_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ .

Приравняем найденные значения  $k_2$ :

$$\sqrt{\frac{2C}{M r^2}} = \frac{2\pi}{T_2}, \text{ или } \frac{2C}{M r^2} = \frac{4\pi^2}{T_2^2}.$$

Откуда  $C = \frac{M r^2}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{T_2^2}$ .

Из уравнения (11.12)  $I_z^A = \frac{T_1^2}{4\pi^2} \cdot C$ , или, подставляя значение C окончательно

получим

$$I_z^A = \frac{T_1^2}{4\pi^2} \cdot \frac{M r^2}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{T_2^2} = \frac{M r^2}{2} \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^2. \quad (11.13)$$

Учитывая, что в выражении  $I_z = \frac{M r^2}{2}$  представляет собой момент инерции диска относительно оси z, это выражение можно использовать как формулу для определения момента инерции любого тела относительно этой же оси. Для этого достаточно отношение

$\left( \frac{T_1}{T_2} \right)^2$  умножить на известный момент инерции твёрдого тела относительно оси z.

### 11.3. Дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела

Как известно из кинематики, плоско-параллельное движение твёрдого тела определяется тремя независимыми параметрами: координатами  $x_c$  и  $y_c$  полюса, который выберем в центре масс  $C$  твёрдого тела, и углом поворота  $\varphi$  тела вокруг центра масс (рис.11.3).

Иначе говоря, движение плоской фигуры определяется заданием уравнений движения центра масс, выбранного в качестве полюса:  $x_c = f_1(t)$ ,  $y_c = f_2(t)$  и уравнения вращения фигуры  $\varphi = f_3(t)$ .

Задачей динамики плоского движения твёрдого тела является нахождение этих уравнений по заданным силам (вторая задача динамики) или определения сил в заданном движении (первая задача).

Разложив плоское движение твёрдого тела на переносное поступательное вместе с центром масс и на относительное вращение вокруг оси, проходящей через центр масс  $C$  перпендикулярно неподвижной плоскости, получим дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела (рис.11.3).

$$M \ddot{x}_c = \sum F_{кx}^e, \quad M \ddot{y}_c = \sum F_{кy}^e, \quad I_c \ddot{\varphi} = \sum m_c \left( \vec{F}_k^e \right) \quad (11.14)$$

Интегрируя эти уравнения, можно определить  $x_c, y_c, \varphi$  как функции времени.

Для определения шести постоянных интегрирования используются начальные условия движения: в начальный момент  $t_0 = 0$  координаты центра масс  $x_{c_0}, y_{c_0}$  и угол поворота  $\varphi_0$ , а также проекции начальной скорости центра масс на оси координат  $\dot{x}_{c_0}, \dot{y}_{c_0}$  и начальная угловая скорость тела  $\dot{\varphi}_0$ .

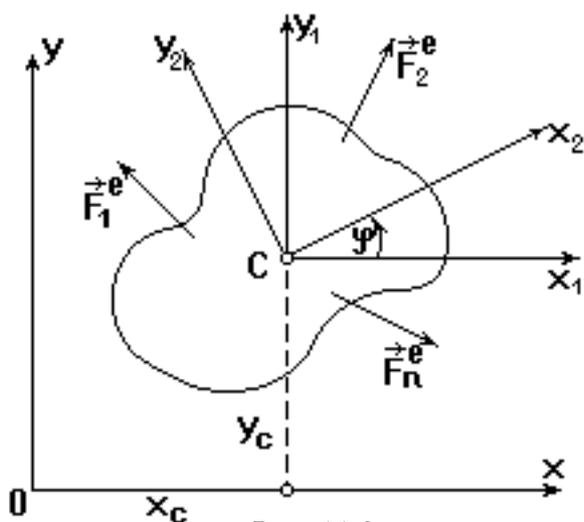


Рис. 11.3

Если траектория центра масс задана, удобно пользоваться дифференциальными уравнениями движения точки  $C$  в проекциях на касательную и главную нормаль к этой траектории.

Тогда дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела имеют вид:

$$\begin{cases} M \frac{dV_c}{dt} = \sum F_k^e \tau, \\ M \frac{V_c^2}{\rho} = \sum F_k^e n, \\ I_c \ddot{\varphi} = \sum m_c \left( \begin{matrix} \vec{e} \\ F_k \end{matrix} \right) \end{cases} \quad (11.15)$$

где  $V_c$  - скорость центра масс,  $\rho$  - радиус кривизны его траектории.

Решение задач динамики плоского движения твёрдого тела рекомендуется выполнять в такой последовательности:

- 1) изобразить на рисунке внешние силы, приложенные к твёрдому телу;
- 2) выбрать систему координат;
- 3) составить дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела;
- 4) в случае решения первой (прямой) задачи динамики искомые внешние силы и их моменты определяются из составленных дифференциальных уравнений;

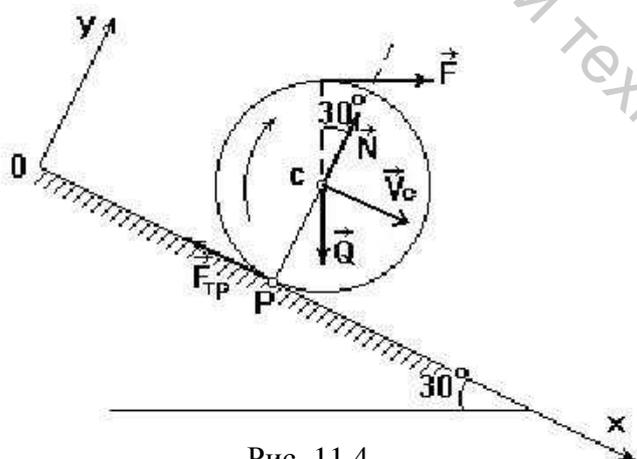


Рис. 11.4

- 5) проинтегрировав дифференциальные уравнения, можно определить уравнения плоского движения твёрдого тела:

$$\begin{aligned} x_c &= f_1(t), \\ y_c &= f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \end{aligned}$$

### Пример 11.3

Определить закон движения центра масс  $C$  колеса, движущегося по наклонной плоскости,

образующей угол  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. К ободу колеса приложена постоянная сила  $\vec{F}$ . Колесо считать однородным диском массы  $M$  и радиуса  $R$ . В начальный момент колесо находилось в покое. Сопротивлением качению и скольжению пренебречь (рис. 11.3). При решении задачи считать, что  $m=100$  кг,  $F=200$ Н.

### Решение

Колесо движется под действием внешних сил: веса  $\vec{Q}$ , заданной силы  $\vec{F}$ , нормальной реакции  $\vec{N}$  наклонной плоскости и силы трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Направим оси  $x$  и  $y$  как указано на рис.11.3. Считаем положительным направление отсчёта угла поворота  $\varphi$  по часовой стрелке.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения колеса:

$$M \ddot{x}_c = \sum F_{\text{кx}}^e = F \cos 30^\circ + Q \cos 60^\circ - F_{\text{тр}}, \quad (11.16)$$

$$M \ddot{y}_c = \sum F_{\text{hy}}^e = F \cos 60^\circ - Q \cos 30^\circ + N, \quad (11.17)$$

$$I_c \ddot{\varphi} = \sum m_c \left( \vec{F}_k^e \right) = F \cdot R + F_{\text{тр}} \cdot R. \quad (11.18)$$

Учитывая, что при движении колеса  $y_c = R = \text{const}$ , то  $\ddot{y}_c = 0$ . Тогда из уравнения (11.17) находим значение  $N$ :

$$N = Q \cos 30^\circ - F \cos 60^\circ.$$

Дифференциальные уравнения (11.16) и (11.18) содержат три неизвестных величины:  $\ddot{x}_c$ ,  $\ddot{\varphi}$  и  $F_{\text{тр}}$ . Для определения этих неизвестных к этим уравнениям добавим ещё одно уравнение.

Так как колесо катится без скольжения, то точка  $P$  является мгновенным центром скоростей. Тогда

$$\dot{x}_c = V_c = \omega \cdot R, \text{ или } \dot{x}_c = \dot{\varphi} R.$$

Вычисляя вторую производную по времени от  $\dot{x}_c$ , получим  $\ddot{x}_c = R \ddot{\varphi}$ , или

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_c}{R}. \quad (11.19)$$

Момент инерции колеса  $I_c = \frac{MR^2}{2}$ . Тогда, подставляя значение (11.19) в уравнение

$$(11.18): \text{имеем } \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{\ddot{x}_c}{R} = (F + F_{\text{тр}}) \cdot R, \text{ или}$$

$$M \ddot{x}_c = 2(F + F_{\text{тр}}). \quad (11.20)$$

Разделив уравнение (11.16) на уравнение (11.20), находим:

$$\frac{F \sqrt{3} + Q - 2F_{\text{тр}}}{4(F + F_{\text{тр}})} = 1, \text{ откуда}$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{F(\sqrt{3} - 4) + Q}{6}. \quad (11.21)$$

Подставляя численные значения в выражение (11.21), получим:

$$F_{\text{тр}} = 87,67 \text{ Н}. \quad (11.22)$$

Подставим найденные значения  $F_{\text{тр}}$  в уравнение (11.16) и дважды проинтегрируем это уравнение:

$$\ddot{x}_c = \frac{1}{M} \left( F \cos 30^\circ + Q \cos 60^\circ - F_{\text{тр}} \right) = 4,89. \quad (11.23)$$

откуда  $\dot{x}_c = 4,89t + C_1$ ,  $x_c = 2,445t^2 + C_1t + C_2$ .

Для начальных условий (при  $t=0$ ,  $x_{c0} = 0$ ,  $\dot{x}_{c0} = 0$ ) постоянные  $C_1$  и  $C_2$  равны нулю.

Окончательно искомый закон движения центра масс колеса  $x_c = 2,445t^2$ .

## Раздел третий

### ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

---

#### Глава XII

#### АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

##### 12.1. Связи и их уравнения. Классификация связей

В статике были рассмотрены простейшие связи и их физические свойства. Динамическое действие этих связей на материальные точки движущейся системы, пользуясь

аксиомой об освобождении от связей, можно представить их реакциями  $\vec{R}_k$  и этим формально несвободную систему материальных точек рассматривать как свободную.

Система материальных точек называется свободной, если положение отдельных её точек и их скорости могут принимать произвольные значения. В противном случае система называется несвободной, т.е. перемещение точек несвободной механической системы не могут быть совершенно произвольными.

Ограничения, накладываемые на координаты или скорости (или на координаты и скорости) отдельных точек, называются связями. Они могут быть записаны в виде уравнений или неравенств.

Например, связь представляет собой поверхность, по которой движется точка. Тогда координаты точки должны удовлетворять уравнению этой поверхности, называемую уравнением связи:

$$f(x, y, z) = 0. \quad (12.1)$$

Введём следующую классификацию связей.

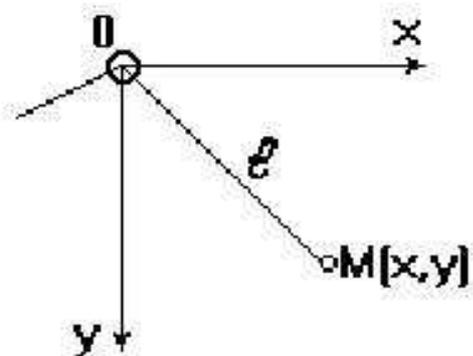


Рис. 12.1

Связи называются стационарными, если уравнения этих связей не содержат явно времени.

Связи называются нестационарными, если уравнения связей содержат время  $t$ .

Связи, накладывающие ограничения на положения точек механической системы, называются голономными.

Связи, накладывающие ограничения на положения и скорости точек механической системы, называются неголономными.

Примером голономной нестационарной связи может служить математический маятник переменной длины. Тяжёлая точка  $M$  привешена на нити, верхний конец которой проходит через отверстие  $O$ , причём нить может укорачиваться по заданному закону так, что длина нити  $OM = l$  будет известной функцией времени  $l(t)$  (рис.12.1). Уравнение связи, налагающее ограничения на координаты  $x$  и  $y$  точки в вертикальной плоскости, будет:

$$x^2 + y^2 = l^2(t). \quad (12.2)$$

Если нить не изменяет свою длину ( $l = const$ ), то получим стационарную голономную связь, уравнение которой имеет вид:

$$x^2 + y^2 = l^2. \quad (12.3)$$

Это уравнение соответствует движению точки по окружности (математический маятник постоянной длины).

Связи называются односторонними (неудерживающими), если они препятствуют перемещениям материальных точек в некоторых направлениях, но допускают перемещения в прямо противоположных направлениях.

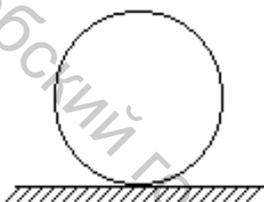


Рис. 12.2 а

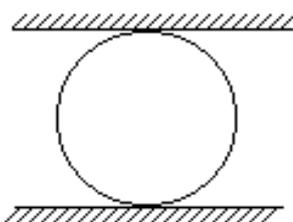


Рис.12.2 б

Уравнение такой связи всегда описывается при помощи неравенств.

Связи называются двухсторонними

(удерживающими), если они препятствуют перемещениям материальных точек в некоторых направлениях, а также в направлениях прямо противоположных. Удерживающие связи всегда описываются при помощи уравнений. Примером односторонней связи может служить горизонтальная плоскость (рис. 12.2 а), примером двухсторонней связи совокупность двух горизонтальных плоскостей (рис. 12.2 б).

В дальнейшем при решении задач будем рассматривать только голономные связи.

## 12.2. Возможные и действительные перемещения

Одним из основных понятий теоретической механики является понятие о возможном перемещении механической системы.

Возможным, или виртуальным, перемещением механической системы называется бесконечно малое перемещение системы, допускаемое связями, наложенными на данную систему.

Будем различать действительное перемещение  $\vec{dr}$  движущейся точки, которая она совершает за элементарный промежуток времени  $dt$ , и возможное перемещение, которое будем обозначать  $\delta \vec{r}$ . Возможное перемещение точка не совершает, а только могла бы совершить, не нарушая наложенных на неё связей в данный момент

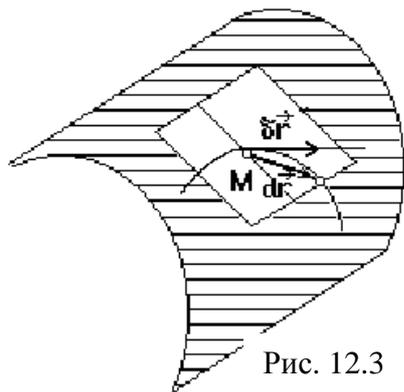


Рис. 12.3

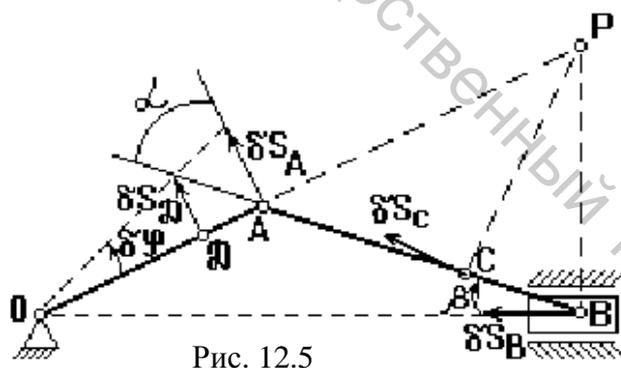
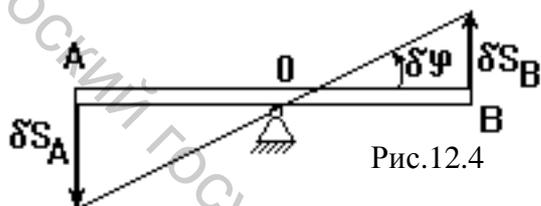
времени (рис.12.3).

Символ “ $\delta$ ”, относящийся к возможным перемещениям, называется вариацией функции.

Варьирование функции производится по тем же правилам, что и дифференцирование, но при фиксированном аргументе, которым является время  $t$ .

Проекции возможного перемещения  $\delta \vec{r}_A$  точки А механической системы на

координатные оси обозначаются  $\delta x_A, \delta y_A, \delta z_A$  и представляют собой изменения координат этой точки при её возможном перемещении, называемые вариациями координат этой точки.



Возможные перемещения точек механической системы рассматривают как величины первого порядка малости, пренебрегая при этом величинами высших порядков малости. Поэтому криволинейные перемещения точек заменяют прямолинейными отрезками, отложенными по касательной к траектории точек.

Так, например, возможным перемещением стержня АВ (рис.12.4) является его поворот на бесконечно малый угол  $\delta \varphi$  вокруг точки О. Возможные перемещения точек А и В, отложенные по касательным к траекториям точек А и В, по величине равны:

$$\delta S_A = OA \cdot \delta \varphi, \quad \delta S_B = OB \cdot \delta \varphi. \quad (12.4)$$

Возможным перемещением кривошипного механизма (рис.12.5) является перемещение, соответствующее повороту кривошипа ОА на бесконечно малый угол  $\delta \varphi$  вокруг оси вала. Возможное перемещение шарнира А представляет собой отрезок касательной к дуге окружности с центром в точке О, равный по величине  $\delta S_A = OA \cdot \delta \varphi$ . Возможным перемещением  $\delta S_B$  ползуна В является бесконечно малый отрезок прямолинейной траектории точки В.

Следует иметь в виду, что практическое определение возможных перемещений точек твёрдых тел, входящих в систему, аналогично методике определения действительных перемещений и зависит от вида возможного движения тела.

При возможном вращательном движении тела необходимо учитывать:

1) величины возможных перемещений точек твёрдого тела пропорциональны расстояниям от точек до оси вращения (кривошип OA на рис.12.5)

$$\frac{\delta S_A}{\delta S_D} = \frac{AO}{DO} ;$$

2) связь между угловыми возможными перемещениями тела и линейными возможными перемещениями точек тела аналогична как и для действительных перемещений, а именно:

$$\delta S_A = \delta \varphi \cdot OA, \quad \delta S_D = \delta \varphi \cdot OD.$$

При возможном плоскопараллельном движении тела, например, шатун АВ на рис.12.5, необходимо учитывать:

- возможные перемещения точек твёрдого тела пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей:

$$\frac{\delta S_A}{AP} = \frac{\delta S_B}{BP} = \frac{\delta S_C}{CP}.$$

- проекции возможных перемещений точек тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой:

$$\delta S_A \cdot \cos \alpha = \delta S_B \cdot \cos \beta.$$

### 12.3. Число степеней свободы. Идеальные связи

Если на систему, состоящую из  $n$  материальных точек, наложены  $k$  связей, то из  $3n$  координат точек системы произвольными будут только  $3n-k$ . Число независимых координат точек системы называется числом степеней свободы системы, т.е.

$$S = 3n - k. \quad (12.5)$$

При решении задач динамики несвободной механической системы возникает вопрос о нахождении такого метода, при котором реакции связей исключаются. Анализ связей показывает, что большинство из них обладает следующим свойством:

сумма работ реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^n R_k \cdot \delta r_k = 0, \quad (12.6)$$

или

$$\sum_{k=1}^n (R_{kx} \cdot \delta x_k + R_{ky} \cdot \delta y_k + R_{kz} \cdot \delta z_k) = 0. \quad (12.7)$$

Такие связи называются идеальными.

Примеры идеальных связей: идеально гладкие плоскости и поверхности, абсолютно жёсткий стержень, гибкая нерастяжимая нить.

Особенностью идеальных связей является то, что их реакции перпендикулярны возможным перемещениям точек их приложения, поэтому работа их сил реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

#### 12.4. Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений представляет собой необходимые и достаточные условия равновесия механической системы. Он формулируется следующим образом: для того, чтобы механическая система с идеальными связями находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, на любом возможном перемещении равнялась нулю.

Следовательно, необходимое и достаточное условие равновесия системы выражается уравнением

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta S_k \cdot \cos(\bar{F}_k, \Delta \delta S_k) = 0. \quad (12.8)$$

Уравнение (12.8) можно представить в таком виде:

$$\sum_{k=1}^n (F_{kx} \cdot \delta x_k + F_{ky} \cdot \delta y_k + F_{kz} \cdot \delta z_k) = 0. \quad (12.9)$$

Количество уравнений равновесия вида (12.8) или (12.9) равно числу степеней свободы системы.

Преимуществом принципа возможных перемещений является отсутствие в его формулировке сил реакций идеальных связей.

Задачи о равновесии твёрдых тел с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется решать в следующей последовательности:

1) выбрать твёрдое тело, равновесие которого необходимо рассмотреть, и изобразить действующие на него силы;

2) освободить тело от неидеальных связей, заменив их действие на тело соответствующими реакциями;

3) дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения сил в зависимости от заданного возможного перемещения;

4) вычислить элементарную работу всех сил, действующих на систему, на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения, и приравнять эту сумму нулю;

5) решив полученное уравнение равновесия, определить искомую величину.

Если система имеет несколько степеней свободы, следует вначале выполнить пункты 1), 2), а затем решать задачу в следующем порядке:

- выбрать независимые возможные перемещения точек системы в числе, равном числу степеней свободы системы;

- дать возможное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом возможные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю;

- выразить возможные перемещения точек приложения сил через это возможное перемещение;

- вычислить сумму работ всех сил на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения и эту сумму приравнять нулю;

- последовательно выполнить выкладки абзацев 2 и 3 для каждого из независимых возможных перемещений, составить систему уравнений равновесия, число которых должно быть равно числу степеней свободы системы;

- решив систему составленных уравнений равновесия определить искомые величины.

## Пример 12.1

Определить величину коэффициента упругости  $C$  пружины механизма в положении равновесия (рис.12.6), если длина кривошипа  $OA=20$  см, величина момента приложенной пары сил  $M=100 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , величина силы  $P=400 \text{ Н}$ , деформация пружины  $\lambda = 2$  см. В положении равновесия пружина растянута.

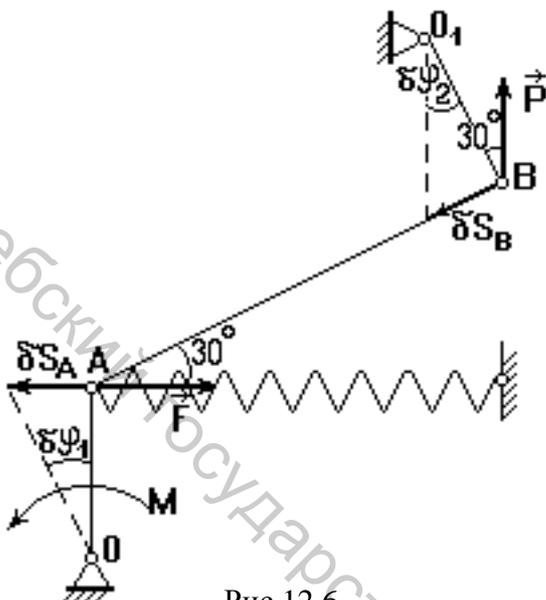


Рис.12.6.

Решение.  
Рассматриваемый механизм находится в равновесии под действием пары сил с моментом  $M$ , заданной силы  $\vec{P}$  и силы упругости пружины  $\vec{F}$ , величина которой  $F = c \lambda$ .

Связи, наложенные на систему допускают возможное угловое перемещение звена  $OA$  на угол  $\delta \varphi_1$  и звена  $O_1B$  на угол  $\delta \varphi_2$ . Тогда точки  $A$  и  $B$  получают возможные перемещения  $\delta S_A$  и  $\delta S_B$ , перпендикулярные звеньям  $OA$  и  $O_1B$  соответственно. Уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений, имеет вид:

$$M \delta \varphi_1 - F \cdot \delta S_A - P \cdot \delta S_B \cdot \cos 60^\circ = 0. \quad (12.10)$$

Выразим возможные перемещения  $\delta S_A$  и  $\delta S_B$  через  $\delta \varphi_1$ . Возможное перемещение  $\delta S_A = OA \cdot \delta \varphi_1$ .

Учитывая, что звено  $AB$  может совершать плоскопараллельное движение, используем теорему о проекциях возможных перемещений точек  $A$  и  $B$  на прямую, соединяющую эти точки, т.е.  $\delta S_A \cdot \cos 30^\circ = \delta S_B$ , или  $\delta S_B = OA \cos 30^\circ \cdot \delta \varphi_1$ .

Подставив полученные значения  $\delta S_A$  и  $\delta S_B$  в уравнение (12.10), получим:

$$M \delta \varphi_1 - F \cdot OA \delta \varphi_1 - P \cdot OA \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ \delta \varphi_1 = 0,$$

или

$$\delta \varphi_1 \left( M - c \lambda \cdot OA - P \cdot OA \cdot \cos 30^\circ \cos 60^\circ \right) = 0 \quad (12.11)$$

В уравнении (12.11) приравняем выражения, стоящее в скобках, к нулю и найдём искомое значение коэффициента упругости:

$$C = \frac{M - P \cdot OA \frac{\sqrt{3}}{4}}{\lambda \cdot OA}.$$

Подставив данные значения величин  $M$ ,  $P$ ,  $OA$  и  $\lambda$ , окончательно имеем

$$C = 16350 \frac{\text{Н}}{\text{м}} = 163,5 \frac{\text{Н}}{\text{см}}.$$

### 12.5. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей

В уравнения работ, выражающие принцип возможных перемещений, не входят реакции идеальных связей, но, тем не менее, с помощью принципа возможных перемещений достаточно просто решаются задачи определения реакций связей. В этом случае используется принцип освобождаемости от связей: отбрасываем связь, реакцию которой требуется определить, и действие связи заменяем реакцией связи, которая переходит в число задаваемых сил. При этом система, освобождённая от одной связи, получает одну степень свободы. Далее системе сообщаем возможное перемещение, соответствующее этой степени свободы, и составляем уравнение работ. В уравнение работ входят задаваемые силы и реакция отброшенной связи.

Для определения реакций других связей следует отбросить снова только одну связь, т.е. сообщить системе одну степень свободы.

На рис.12.7 даны примеры замены сложных плоских связей более простыми:

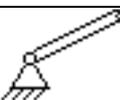
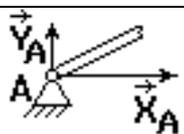
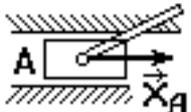
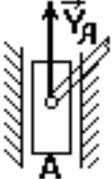
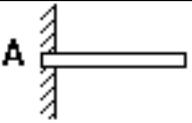
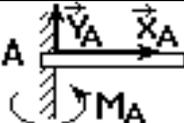
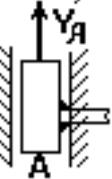
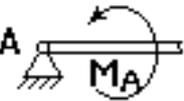
Вид связи	Реакции связи	Определение $X_A$	Определение $Y_A$	Определение $M_A$
				
				

Рис.12.7

## Пример 12.2

Определить при помощи принципа возможных перемещений реакции опор А, В и Д составной балки, изображённой на рис.12.8 а. Дано:  $q=10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ,  $M=60 \text{ кНм}$ ,  $P_1=20 \text{ кН}$ ,  $P_2=60 \text{ кН}$ .

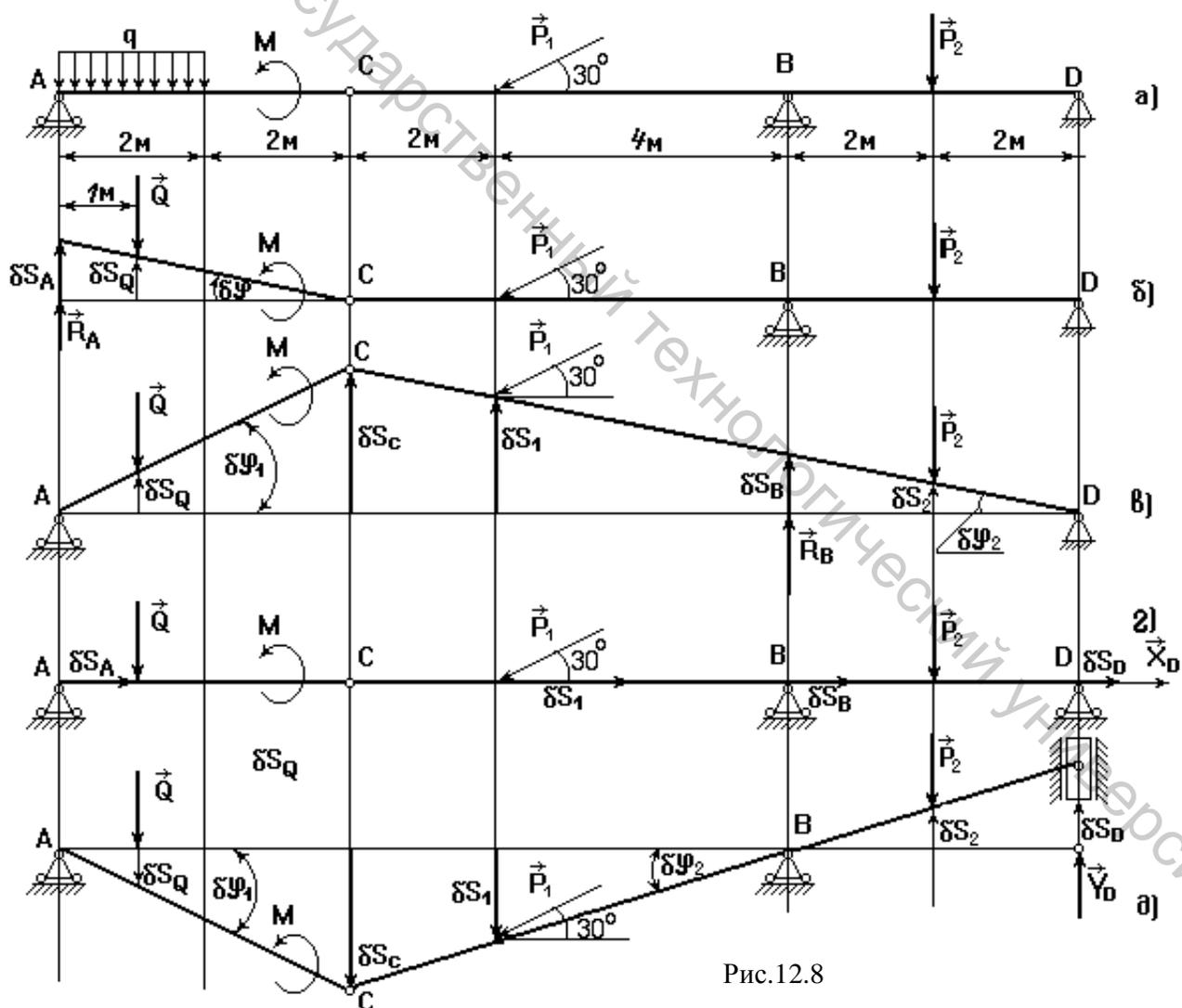


Рис.12.8

## Решение

Равномерно распределённую нагрузку заменим сосредоточенной силой  $Q = 2 \cdot q = 20 \text{ кН}$ , линия действия которой находится на расстоянии 1 м от опоры А.

1. Для определения реакции опоры А мысленно отбрасываем эту опору и заменяем отсутствие этой связи реакцией  $\vec{R}_A$ . Даём точке А возможное перемещение  $\delta S_A$ , в результате которого балка АС повернётся вокруг шарнира С на угол  $\delta \varphi$ , а балка CD остаётся неподвижной (рис. 12.8 б). Точка приложения силы  $\vec{Q}$  получает возможное перемещение  $\delta S_Q$ .

Составим уравнение работы:

$$R_A \cdot \delta S_A - Q \cdot \delta S_Q - M \cdot \delta \varphi = 0. \quad (12.12)$$

Выразим возможные перемещения, входящие в уравнение (12.12) через  $\delta \varphi$ . Так как балка АС может вращаться вокруг точки С, то  $\delta S_A = 4 \delta \varphi$ ,  $\delta S_Q = 3 \delta \varphi$ . Тогда имеем  $R_A \cdot 4 \delta \varphi - Q \cdot 3 \delta \varphi - M \delta \varphi = 0$ .

Разделив полученное уравнение на  $\delta \varphi$ , определяем  $R_A = 30 \text{ кН}$ .

2. Для определения реакции опоры в точке В мысленно отбросим эту опору, приложив к балке её реакцию  $R_B$ . Сообщим точке В возможное перемещение  $\delta S_B$ , при котором балка CD повернётся вокруг опоры Д на угол  $\delta \varphi_2$ , а балка СА повернётся вокруг опоры А на угол  $\delta \varphi_1$ . При этом точки приложения сил  $\vec{Q}, \vec{P}_1, \vec{P}_2$  получают возможные перемещения  $\delta S_Q, \delta S_1, \delta S_2$  соответственно (рис. 12.8 в).

Составим уравнение работ для определения  $R_B$ :

$$-Q \delta S_Q + M \delta \varphi_1 - P_1 \cdot \delta S_1 \cos 60^\circ + R_B \cdot \delta S_B - P_2 \cdot \delta S_2 = 0. \quad (12.13)$$

Выразим возможные перемещения через угол поворота  $\delta \varphi_2$ . Имеем, что  $\delta S_C = 4 \delta \varphi_1 = 10 \delta \varphi_2$ , откуда  $\delta \varphi_1 = 2,5 \delta \varphi_2$ . Тогда  $\delta S_Q = 1 \cdot \delta \varphi_1 = 2,5 \delta \varphi_2$ ,  $\delta S_1 = 8 \delta \varphi_2$ ,  $\delta S_B = 4 \delta \varphi_2$ ,  $\delta S_2 = 2 \delta \varphi_2$ .

Уравнение (12.13) примет вид:

$$-Q \cdot 2,5 \delta \varphi_2 + M \cdot 2,5 \delta \varphi_2 - P_1 \cdot \cos 60^\circ \cdot 8 \delta \varphi_2 + R_B \cdot 4 \delta \varphi_2 - P_2 \cdot 2 \delta \varphi_2 = 0$$

Разделив полученное уравнение на  $\delta \varphi_2$ , определим  $R_B$ :

$$R_B = \frac{2,5 Q - 2,5 M + 4 P_1 + 2 P_2}{4} = 25 \text{ кН}.$$

3. Определим горизонтальную составляющую реакции шарнирно-неподвижной опоры D.

Для этого мысленно отбросим связь, препятствующую горизонтальному перемещению балки, т.е. заменим неподвижную шарнирную опору D подвижной опорой, приложив при этом к балке горизонтальную реакцию  $\vec{X}_D$ .

Получим составную балку, имеющую все опоры на катках.

Сообщим точке D возможное перемещение  $\delta S_D$ , направленное по горизонтали вправо. При этом возможные перемещения всех точек составной балки будут равны  $\delta S_D$ .

Работа сил  $\vec{Q}$ ,  $\vec{P}_2$  равна нулю, т.к. эти силы перпендикулярны возможным перемещениям  $\delta S_D$ . Работа пары сил с заданным моментом M также равна нулю, так как балка AC, к которой приложена пара, не получила поворота. Тогда уравнение работ запишется так:

$$X_D \cdot \delta S_D - P_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot \delta S_D = 0, \quad (12.14)$$

откуда  $X_D = 17,32$  к Н.

4. Чтобы определить вертикальную составляющую  $\vec{Y}_D$  реакции опоры D, мысленно отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению конца D, приложив к балке реакцию  $\vec{Y}_D$ . Дадим точке D возможное перемещение  $\delta S_D$ , направленное вертикально вверх. При этом балка CD повернётся вокруг точки B на угол  $\delta \varphi_2$ , а балка AC повернётся на угол  $\delta \varphi_1$  вокруг точки A.

Уравнение работ для определения  $\vec{Y}_D$  имеет вид:

$$Q \delta S_Q - M \delta \varphi_1 + P_1 \cos 60^\circ \cdot \delta S_1 - P_2 \cdot \delta S_2 + Y_D \cdot \delta S_D = 0. \quad (12.15)$$

Выразим возможные перемещения, вошедшие в уравнение (12.15), через  $\delta \varphi_2$ .

Имеем, что  $\delta S_c = 4 \delta \varphi_1 = 6 \delta \varphi_2$ , откуда  $\delta \varphi_1 = \frac{3}{2} \delta \varphi_2$ .

Тогда  $\delta S_Q = \frac{3}{2} \delta \varphi_2$ ,  $\delta S_1 = 4 \delta \varphi_2$ ,  $\delta S_2 = 2 \delta \varphi_2$ ,  $\delta S_D = 4 \delta \varphi_2$ .

Уравнение (12.15) примет вид:

$$Q \cdot \frac{3}{2} \delta \varphi_2 - M \cdot \frac{3}{2} \delta \varphi_2 + P_1 \cos 60^\circ \cdot 4 \delta \varphi_2 - P_2 \cdot 2 \delta \varphi_2 + Y_D \cdot 4 \delta \varphi_2 = 0.$$

Разделив полученное уравнение на  $\delta \varphi_2$ , определим значение  $Y_D$ :

$$Y_D = \frac{\frac{3}{2} M - \frac{3}{2} Q - 2 P_1 + 2 P_2}{4} = 35 \text{ кН}.$$

Из уравнений (12.12), (12.13), (12.14) и (12.15) видно, что реакция каждой опоры входит лишь в одно уравнение работ. Таким образом, каждая реакция определяется из одного уравнения независимо от реакций других опор.

## 12.6. Принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики)

Применяя совместно принцип Даламбера и принцип возможных перемещений к движущейся системе, можно сделать следующий вывод:

при движении системы материальных точек, подчинённой идеальным связям, сумма работ заданных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях точек системы равна нулю.

Этот результат выражается уравнением

$$\sum_{k=1}^n \left( \vec{F}_k + \vec{\Phi}_k \right) \delta \vec{r}_k = 0, \quad (12.16)$$

где  $\vec{F}_k$  - равнодействующая всех заданных (активных) сил, приложенных к каждой точке системы;  $\vec{\Phi}_k$  - сила инерции точки;  $\delta \vec{r}_k$  - независимое возможное перемещение каждой точки.

Уравнение (12.16) является общим уравнением динамики механической системы.

Учитывая, что  $\vec{\Phi}_k = -m_k \vec{a}_k$ , уравнение (12.16) можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n \left( \vec{F}_k - m_k \vec{a}_k \right) \delta \vec{r}_k = 0. \quad (12.17)$$

В проекции на оси координат уравнение (12.17) имеет вид:

$$\sum_{k=1}^n \left[ \left( F_{kx} - m_k \ddot{x}_k \right) \delta x_k + \left( F_{ky} - m_k \ddot{y}_k \right) \delta y_k + \left( F_{kz} - m_k \ddot{z}_k \right) \delta z_k \right] = 0. \quad (12.18)$$

Общее уравнение динамики (12.18) позволяет составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы, в которые не входят силы реакции задаваемых связей. Поэтому возможно решение как прямых (определение сил по заданному закону движения), так и обратных задач (определение закона движения по заданным силам) динамики.

Основным преимуществом общего уравнения динамики по сравнению с другими теоремами динамики является то, что в его формулировке отсутствуют силы реакций идеальных связей.

Если механическая система состоит из отдельных твёрдых тел, то силы инерции точек каждого тела можно привести к силе, приложенной в некоторой точке тела, или паре сил. При этом сила равна главному вектору сил инерции точек этого тела, а момент пары равен главному моменту этих сил относительно центра приведения (12.3).

При этом необходимо учитывать следующее.

а) При поступательном движении твёрдого тела силы инерции приводятся к равнодействующей  $\vec{\Phi}$ , причём  $\vec{\Phi} = -M \vec{a}$ , где  $M$  - масса тела,  $\vec{a}$  - ускорение любой точки твёрдого тела.

б) При вращении твёрдого тела вокруг оси, проходящей через центр масс, силы инерции приводятся к главному моменту сил инерции, модуль которого определяется по формуле:

$$M^{\Phi} = I_{zc} \cdot \varepsilon,$$

где  $I_{zc}$  - момент сил инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс;

$\varepsilon$  - угловое ускорение вращения твёрдого тела.

Главный момент сил инерции направлен в сторону, противоположную угловому ускорению.

в) При плоскопараллельном движении силы инерции приводятся к главному вектору и главному моменту, причём главный вектор  $\vec{\Phi} = -M \vec{a}_c$ ,  $\vec{a}_c$  - ускорение центра масс

твёрдого тела, а главный момент  $M^{\Phi} = -I_{zc} \cdot \varepsilon$ , где  $I_{zc}$  - момент инерции твёрдого тела относительно оси, проходящей через центр масс.

Задачи с помощью общего уравнения динамики рекомендуется решать в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке все действующие на систему активные силы;

2) определить главные вектора и главные моменты сил инерции для каждого из тел, входящих в систему;

3) определить число степеней свободы.

Дальнейший порядок решения задачи зависит от числа степеней свободы рассматриваемой системы.

Для системы с одной степенью свободы:

- сообщить возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения всех сил, указанных в первых двух пунктах;

- показать на рисунке соответствующие возможные перемещения всех точек системы или возможные угловые перемещения тел, к которым приложены активные силы и силы инерции;

- вычислить сумму работ всех сил, указанных в первых двух пунктах, на возможных перемещениях точек системы и составить общее уравнение динамики;

- сократить полученное уравнение на заданное возможное перемещение и определить искомую величину.

Для системы с несколькими степенями свободы:

- сообщить системе одно независимое возможное перемещение, считая все остальные независимые переменные равными нулю;

- выполнить действия, изложенные выше, заканчивая предпоследним абзацем;

- повторить аналогичные действия с каждым из оставшихся независимых возможных перемещений отдельно, в результате чего получится система уравнений, число которых равно числу степеней свободы;

- сократив каждое из составленных уравнений на соответствующее независимое возможное перемещение, определить искомые величины из полученной системы уравнений.

### *Пример 12.3*

Груз 1 массы  $M$ , приводит в движение ступенчатый шкив 2 ( $R=2r$ ) массы  $M_2$ , заставляя каток 3 массы  $M_3$  и радиуса  $r$  катиться без скольжения по наклонной плоскости.

Радиус инерции шкива 2 относительно оси  $O$ , перпендикулярной плоскости рисунка, равен  $\rho$ . Определить ускорение груза, если коэффициент трения качения катка равен  $k$  (рис.12.9).

### Решение

Данная система имеет одну степень свободы, так как положение системы определяется

перемещением груза 1. На данную систему действуют активные силы:  $\vec{P}_1$  - вес груза;  $\vec{P}_2$  -

вес шкива 2;  $\vec{P}_3$  - вес катка 3. Так как наклонная плоскость не является

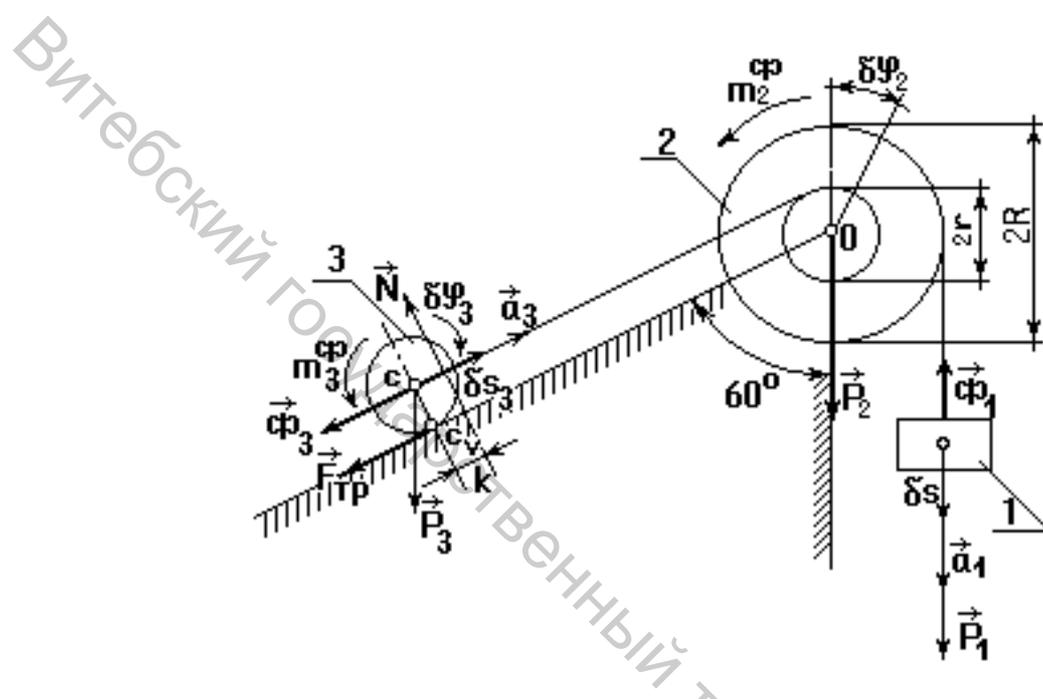


Рис. 12.9.

идеальной  
связью, то в  
точке касания  
катка и  
плоскости  
приложим силу  
трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$   
катка о  
наклонную  
плоскость, а  
нормальную  
силу реакции  
 $\vec{N}$  наклонной  
плоскости  
сместим в  
сторону  
движения катка

на расстояние  $k$ , равное плечу пары трения качения, т.е.  $m_{\text{т.к.}} = N \cdot k = k P_3 \cos 30^\circ$  (рис. 12.9).

Определим силы инерции системы. Искомое ускорение  $\vec{a}_1$  груза 1 направим по вертикали вниз. Так как груз движется поступательно, то сила инерции груза  $\vec{\Phi}_1 = -M_1 \vec{a}_1$ .

Ступенчатый шкив вращается вокруг оси, проходящей через центр масс  $O$  шкива перпендикулярно плоскости, поэтому силы инерции шкива приводятся к паре сил инерции, момент которой  $m_2^\Phi = -I_2 \cdot \varepsilon_2$ , где  $I_2$  - момент инерции шкива относительно оси, проходящей через точку  $O$ .

$$\text{Момент инерции неоднородного шкива } I_2 = M_2 \rho^2.$$

$$\text{Угловое ускорение шкива } \varepsilon_2 = \frac{a_1}{R} = \frac{a_1}{2r}.$$

$$\text{Тогда имеем } m_2^{\Phi} = -M_2 \rho^2 \cdot \frac{a_1}{2r}.$$

Так как каток движется плоскопараллельно, то силы инерции его точек приводятся к главному вектору и главному моменту сил инерции.

$$\text{Главный вектор сил инерции по модулю равен } \Phi_3 = M_3 a_3, \text{ где } a_3 = \varepsilon_2 \cdot r_2 = \frac{a_1}{2}.$$

$$\text{Тогда } \Phi_3 = M_3 \frac{a_1}{2}.$$

Вектор  $\vec{\Phi}_3$  направлен противоположно ускорению  $\vec{a}_3$ .

Главный момент сил инерции катка  $m_3^{\Phi} = -I_{3c} \cdot \varepsilon_3$ , где  $I_{3c}$  - момент инерции катка относительно оси Cz, проходящей через точку C и перпендикулярной плоскости рисунка,

$$\text{т.е. } I_{3c} = \frac{M_3 r^2}{2}.$$

$$\text{Получим, что } m_3^{\Phi} = -\frac{M_3 r^2}{2} \cdot \varepsilon_3.$$

Сообщим грузу 1 возможное перемещение  $\delta S$ . Тогда шкив 2 повернется вокруг оси O на угол  $\delta \varphi_2$ , центр масс C катка переместится на величину  $\delta S_3$ , а сам каток повернется на угол  $\delta \varphi_3$ .

Составим общее уравнение для рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned} P_1 \delta S - \Phi_1 \delta S - m_2^{\Phi} \cdot \delta \varphi_2 - k P_3 \cos 30^\circ \cdot \delta \varphi_3 - P_3 \cos 60^\circ \cdot \delta S_3 - \\ - m_3^{\Phi} \cdot \delta \varphi_3 - \Phi_3 \cdot \delta S_3 = 0. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Точка  $C_v$  является мгновенным центром скоростей катка, поэтому

$\delta S_3 = r_3 \delta \varphi_3 = r_2 \delta \varphi_2$ . Учитывая, что  $r_3 = r_2 = r$ , имеем  $\delta \varphi_3 = \delta \varphi_2$ . Очевидно, что

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta S}{R} = \frac{\delta S}{2r}. \text{ Тогда } \delta \varphi_3 = \frac{\delta S}{2r}, \text{ а } \delta S_3 = \frac{\delta S}{2}.$$

Так как  $a_3 = \varepsilon_3 \cdot r_3$ , то  $\varepsilon_3 = \frac{a_3}{r_3} = \frac{a_1}{2r}$ .

Тогда, подставив значения  $\Phi_1, m_2^\Phi, m_3^\Phi, \Phi_3, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3, \delta S_3, \varepsilon_3$  в общее уравнение динамики (12.19), получим

$$P_1 \delta S - M_1 a_1 \delta S - M_2 \rho^2 \frac{a_1}{2r} \frac{\delta S}{2r} - k P_3 \cos 30^\circ \frac{\delta S}{2r} - P_3 \cos 60^\circ \frac{\delta S}{2} - \frac{M_3 r^2}{2} \frac{a_1}{2r} \frac{\delta S}{2r} - M_3 \frac{a_1}{2} \frac{\delta S}{2} = 0.$$

Учитывая, что  $P_1 = M_1 g$ ,  $P_3 = M_3 g$ , и сокращая на  $\delta S$ , получим уравнение для определения ускорения  $a_1$ :

$$M_1 g - M_1 a_1 - M_2 \frac{\rho^2}{4r^2} - \frac{k M_3 g \sqrt{3}}{4r} - \frac{M_3 g}{4} - \frac{M_3}{8} a_1 - \frac{M_3}{4} a_1 = 0 \quad (12.20)$$

Окончательно

$$a_1 = \frac{2g(4M_1 r - k M_3 \sqrt{3} - M_3 r)}{8M_1 r^2 + 2M_2 \rho^2 + 3M_3 r^2}.$$

## Глава XIII

### АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

#### 13.1 Обобщённые координаты системы

Решение многих задач динамики можно существенно упростить, если ввести понятие об обобщённых координатах.

Обобщёнными (или лагранжевыми) координатами механической системы называется совокупность независимых параметров, однозначно определяющих положение системы в пространстве.

Число степеней свободы механической системы, подчинённой идеальным и голономным связям, равно числу независимых обобщённых координат.

Будем обозначать обобщённые координаты буквой  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, S$ , где  $S$  - число обобщённых координат).

Например, положение рычага АВ с осью вращения О вполне определяется заданием его угла поворота  $\varphi$  (рис.13.1).

Угол  $\varphi$  можно рассматривать как обобщённую координату рычага. Так как положение рычага определяется одной обобщённой координатой, то рычаг имеет одну степень свободы.

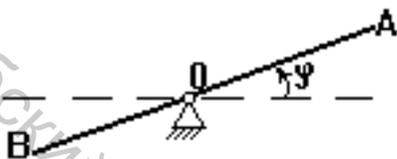


Рис. 13.1

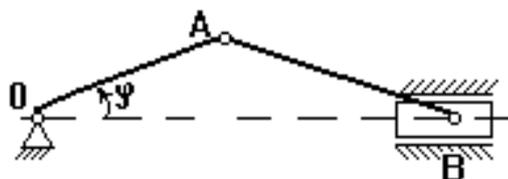


Рис. 13.2

Положение всех точек кривошипного механизма (рис. 13.2) вполне определяется заданием только угла поворота  $\varphi$  кривошипа. Этот угол  $\varphi$  является обобщённой координатой, а механизм имеет одну степень свободы.

Обобщённой скоростью будем называть производную по времени от обобщённой

координаты, т.е.  $\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$ .

Декартовы координаты каждой точки механической системы можно выразить как функции параметров  $q_1, q_2, \dots, q_s$  и времени  $t$ , т.е.

$$\left. \begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \end{aligned} \right\} (k=1, 2, \dots, n). \quad (13.1)$$

Радиус - вектор  $\vec{r}_k$  точки механической системы с  $S$  степенями свободы тоже является в случае нестационарных связей функцией обобщённых координат и времени:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s, t),$$

где  $q_1, q_2, \dots, q_s$  - обобщённые координаты, а  $k = 1, 2, \dots, n$  ( $n$  - число материальных точек системы).

Скорость этой точки равна

$$\vec{V}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t},$$

или

$$\vec{V}_k = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}. \quad (13.2)$$

В случае стационарных связей

$$\vec{V} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (13.3)$$

Возможное перемещение этой точки, выражаемое приращением радиуса-вектора  $\vec{r}_k$ ,

$$\text{имеет вид } \delta \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \delta q_s,$$

или

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (13.4)$$

где  $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_s$  - обобщённые возможные перемещения.

В формулу (13.4) не входит время, так как возможное перемещение определяется при фиксированном значении времени.

### 13.2 Обобщённые силы

Обобщённой силой  $Q_j$ , соответствующей обобщённой координате  $q_j$ , называется скалярная величина, равная отношению элементарной работы действующих сил на перемещении механической системы, вызванном элементарным приращением  $\delta q_j$  координаты  $q_j$ , к величине этого приращения, т.е.

$$Q_j = \frac{\delta A_{q_j}}{\delta q_j} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2 \dots S). \quad (13.5)$$

где  $n$  - число материальных точек,  $S$  - число степеней свободы механической системы,

$\vec{F}_k$  - равнодействующая задаваемых сил, приложенной к  $k$ -ой точке системы.



3) Если механическая система находится под действием сил, имеющих потенциал, то после выбора обобщённых координат надо вычислить потенциальную энергию  $\Pi$  системы, выразив её в зависимости от обобщённых координат. Тогда

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2 \dots S). \quad (13.10)$$

### Пример 13.1

Двойной математический маятник состоит из двух невесомых стержней длиной  $l_1$  и  $l_2$ , на концах которых укреплены материальные точки  $M_1$  и  $M_2$  веса  $P_1 = m_1 g$  и  $P_2 = m_2 g$  соответственно. Первый стержень может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси  $O$ , а второй - вокруг горизонтальной оси, связанной с первой точкой. Ввести обобщённые координаты и вычислить обобщённые силы (рис. 13.3.).

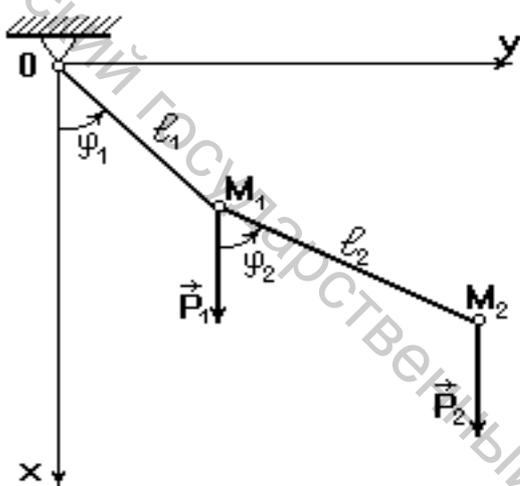


Рис. 13.3

### Решение

Так как маятник движется в вертикальной плоскости, то оси  $x$  и  $y$  выберем так, как указано на рис.13.3 (ось  $z$  направим перпендикулярно к плоскости рисунка).

Положение двойного математического маятника вполне определяется двумя углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  отклонения стержней от вертикали, т.е. система имеет две степени свободы. За обобщённые координаты  $q_1$  и  $q_2$  примем углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Покажем вычисление обобщённых сил тремя способами.

*Первый способ.* Найдём проекции сил  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$  и координаты точек их приложения:

$$P_{1x} = m_1 g, \quad P_{1y} = 0, \quad P_{1z} = 0, \quad P_{2x} = m_2 g, \quad P_{2y} = 0, \quad P_{2z} = 0,$$

$$x_1 = l_1 \cos \varphi_1, \quad x_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2,$$

$$y_1 = l_1 \sin \varphi_1, \quad y_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2,$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Для определения обобщённых сил используем формулы (13.8) и запишем значения для каждой из величин  $Q_1$  и  $Q_2$  в развёрнутом виде, заменив  $q_1$  и  $q_2$  на  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$Q_1 = P_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + P_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + P_{1z} \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} + P_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} + P_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} + P_{2z} \frac{\partial z_2}{\partial \varphi_1},$$

$$Q_2 = P_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2} + P_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_2} + P_{1z} \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_2} + P_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_2} + P_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_2} + P_{2z} \frac{\partial z_2}{\partial \varphi_2},$$

Подставляя значения проекций сил и координат точек их приложения в полученные выражения  $Q_1$  и  $Q_2$ , имеем:

$$Q_1 = -m_1 g l_1 \sin \varphi_1 - m_2 g l_1 \sin \varphi_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1.$$

$$Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

*Второй способ.* Вычислим сначала обобщённую силу  $Q_2$ , соответствующую

обобщённой координате  $\varphi_2$ . Сообщим

системе такое возможное перемещение,

при котором угол  $\varphi_1$  остаётся неизменным

( $\delta \varphi_1 = 0$ ), а угол  $\varphi_2$  получает

приращение  $\delta \varphi_2$  (рис. 13.4). В этом случае

работу будет производить только сила  $\vec{P}_2$ .

Работу силы  $\vec{P}_2$  на возможном

перемещении  $\delta \varphi_2$  найдём как работу

силы, приложенной к твёрдому телу,

вращающемуся вокруг неподвижной оси.

Момент силы  $\vec{P}_2$  относительно оси  $z_1$ ,

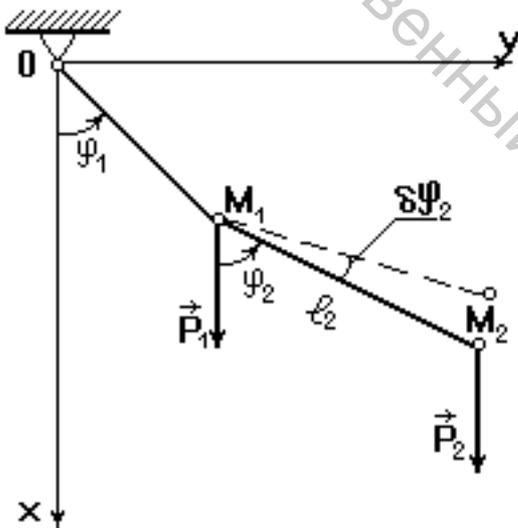


Рис. 13.4.

проходящей через точку  $M_1$  равен

$$M_{z_1} \left( \vec{P}_2 \right) = -P_2 l_2 \sin \varphi_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2,$$

Тогда элементарная работа  $\delta A_2$  на возможном перемещении  $\delta \varphi_2$  равна

$$\delta A_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2 \delta \varphi_2.$$

Коэффициент при  $\delta \varphi_2$  представляет собой обобщённую силу  $Q_2$ :

$$Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

Для определения обобщённой силы  $Q_1$  дадим системе такое возможное перемещение, при котором угол  $\varphi_1$  получит приращение  $\delta \varphi_1$ , а угол  $\varphi_2$  останется неизменным ( $\delta \varphi_2 = 0$ )

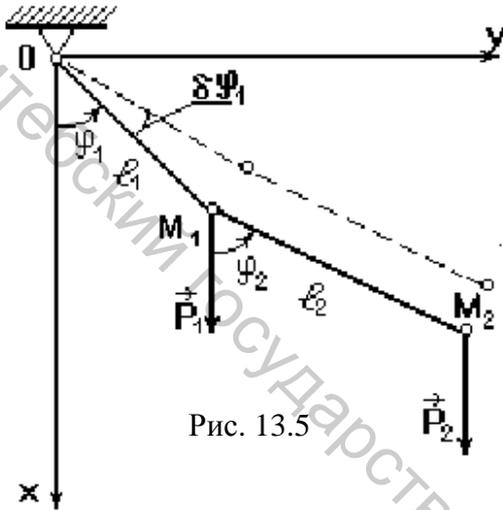


Рис. 13.5

(рис. 13.5). Работу силы  $\vec{P}_1$  вычислим как работу силы, приложенной к стержню, вращающемуся вокруг неподвижной оси  $z$ .

Момент силы  $\vec{P}_1$  относительно оси  $z$

$$M_z \left( \vec{P}_1 \right) = -m_1 g l_1 \sin \varphi_1.$$

Следовательно, работа этой силы на возможном перемещении  $\delta \varphi_1$ :

$$\delta A \left( \vec{P}_1 \right) = -m_1 g l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1.$$

При неизменном угле  $\varphi_2$  стержень  $M_1 M_2$  будет двигаться поступательно. Поэтому возможная работа силы  $\vec{P}_2$  на возможном перемещении  $\delta \varphi_1$  будет равна  $\delta A \left( \vec{P}_2 \right) = -m_2 g l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1$ .

Сумма работ сил  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$  на возможном перемещении  $\delta \varphi_1$  будет иметь вид

$$\delta A_1 = -m_1 g l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - m_2 g l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1.$$

Коэффициент при  $\delta \varphi_1$  полученный в выражении элементарной работы  $\delta A_1$ , равен обобщённой силе, соответствующей координате  $\varphi_1$ , т.е.  $Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1$ .

*Третий способ.* Так как силы  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$  консервативны, то для определения обобщённых сил  $Q_1$  и  $Q_2$  применим формулу (13.10), т.е. обобщённые силы в данной задаче будем определять по формулам

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}. \quad (13.11)$$

Определим потенциальную энергию  $\Pi$  системы, вычислив её как работу сил  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$  при перемещении системы из данного положения в горизонтальное (рис.13.3):

$$\Pi = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2.$$

Выполняя дифференцирование по формулам (13.11), получим

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1,$$

$$Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

### 13.3 Общее уравнение динамики и условия равновесия в обобщённых координатах

Общее уравнение динамики системы имеет вид:

$$\sum_{k=1}^n \left( \vec{F}_k + \vec{\Phi}_k \right) \delta \vec{r}_k = 0. \quad (13.12)$$

Подставив в это выражение значение возможного перемещения точек системы  $\delta \vec{r}_k$ , вызванное бесконечно малыми приращениями всех обобщённых координат системы (13.11), получим:

$$\sum_{k=1}^n \left( \vec{F}_k + \vec{\Phi}_k \right) \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = 0, \text{ или}$$

$$\sum_{j=1}^S \left( \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (13.13)$$

В этом выражении

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = Q_j - \text{обобщённая сила, соответствующая}$$

координате  $q_j$ ,

$$\sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = Q_j^\Phi - \text{обобщённая сила инерции,}$$

соответствующая обобщённой координате  $q_j$ .

Тогда уравнение (13.13) примет вид:

$$\sum_{j=1}^S (Q_j + Q_j^{\Phi}) \delta q_j = 0. \quad (13.14)$$

Приращения обобщённых координат  $q_j$  произвольны и независимы друг от друга.

Поэтому в уравнении (13.14) все коэффициенты при этих приращениях должны быть равны нулю, т.е.

$$Q_j + Q_j^{\Phi} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (13.15)$$

Уравнения (13.15) эквивалентны общему уравнению динамики (13.12).

Если силы, действующие на механическую систему, уравновешиваются, т.е. механическая система находится в состоянии покоя, то силы инерции её точек равны нулю.

Следовательно, обобщённые силы инерции системы равны нулю, т.е.  $Q_j^{\Phi} = 0$ , ( $j = 1, 2, \dots, S$ ).

Тогда уравнения (13.15) принимают вид:

$$Q_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (13.16)$$

Равенства (13.16) выражают условия равновесия сил в обобщённых координатах.

Уравнение (13.15) в обобщённых координатах можно представить иначе:

$$\sum_{j=1}^S \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0, \quad (13.17)$$

где  $q_1, q_2, \dots, q_S$  - обобщённые координаты,  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S$  - обобщённые скорости,  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_S$  - обобщённые возможные перемещения системы, являющиеся вариациями соответствующих обобщённых координат,  $Q_1, Q_2, \dots, Q_S$  - обобщённые силы системы,  $T$  - кинетическая энергия системы.

#### 13.4. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщённых координатах или уравнения Лагранжа второго рода

В общем уравнении динамики механической системы в обобщённых координатах в виде (13.17) величины  $\delta q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, S$ ) независимы и произвольны. Поэтому общее



$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.21)$$

Для составления уравнений Лагранжа второго рода необходимо соблюдать следующую последовательность:

1. Определить число степеней свободы и выбрать соответствующие обобщённые координаты, число которых равно числу степеней свободы;
2. Изобразить все задаваемые силы.
3. Вычислить кинетическую энергию  $T$  механической системы в ее абсолютном движении.

4. Найти частные производные от кинетической энергии  $T$  по обобщённым скоростям, т.е.  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$ , а затем вычислить производные по времени от полученных

выражений:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}, \dots, \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$ .

5. Найти частные производные от кинетической энергии  $T$  по обобщённым координатам, т.е.  $\frac{\partial T}{\partial q_1}, \frac{\partial T}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q_s}$ .

6. Определить обобщённые силы  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$  следующим образом:

чтобы найти обобщённую силу  $Q_j$ , соответствующую обобщённой координате  $q_j$ , необходимо механической системе сообщить такое возможное перемещение, при котором изменяется только одна координата  $q_j$ , а все остальные обобщённые координаты остаются неизменными, т.е.  $\delta q_j \neq 0$ ,

$$\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_{j-1} = \delta q_{j+1} = \dots = \delta q_s = 0.$$

Тогда обобщённую силу можно вычислить по формуле  $Q_j = \frac{\sum_{k=1}^n \delta A_{j_k}}{\delta q_j}$ , ( $j = 1, 2, \dots$ )

5).

7. Результаты, полученные в пунктах 4, 5, 6, подставить в уравнения Лагранжа (13.19).

*Пример 13.2.* Механическая система состоит из грузов 1 и 4, неподвижного блока 2 и

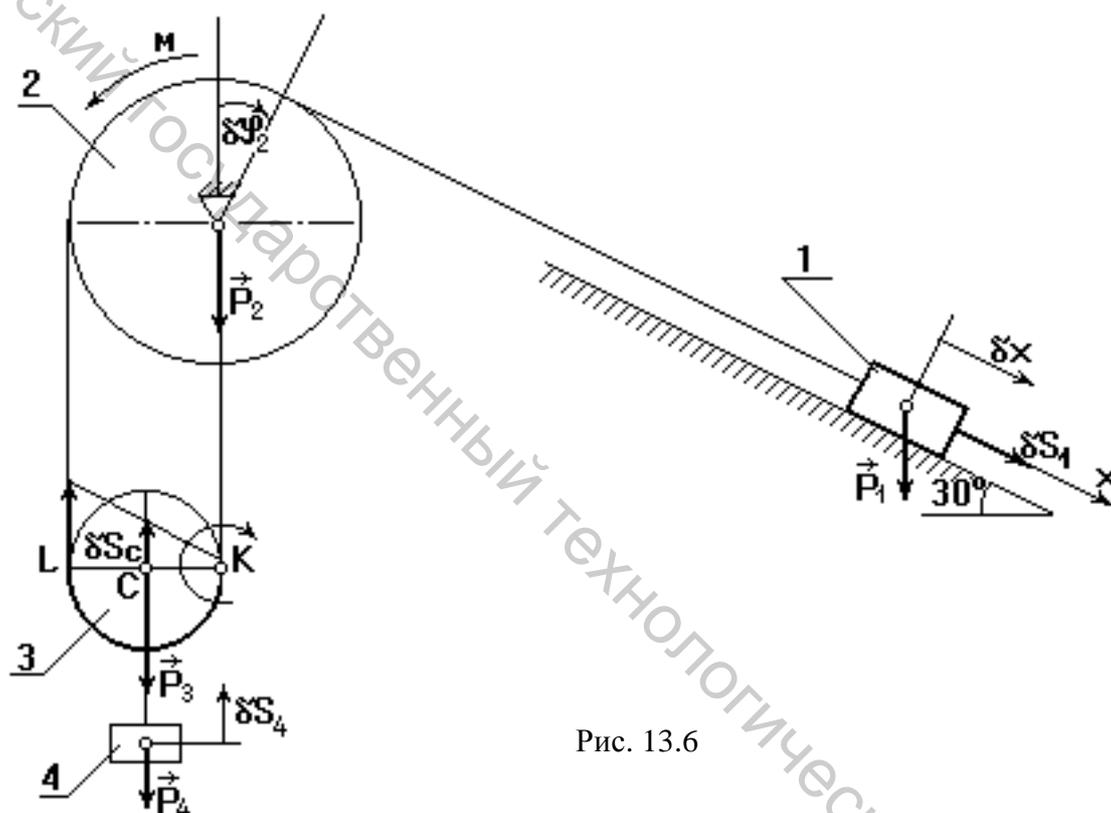


Рис. 13.6

подвижного блока 3 весом  $P_1, P_2, P_3, P_4$  соответственно, соединённых нерастяжимой нитью (рис.13.6). На блок 2 действует момент сопротивления  $M$ . Определить ускорение груза 1 при следующих данных:  $P_1 = 4P$ ,  $P_2 = 2P$ ,  $P_3 = P$ ,  $P_4 = 0,5P$ ,  $M = 0,2PR$ , где  $R$  - радиус блока 2. Блоки считать однородными дисками.

#### Решение

Положение механической системы определяется одним параметром - перемещением груза 1, который принимаем за обобщённую координату. Направим ось  $x$  вниз параллельно наклонной плоскости ( $q=x$ ). Система имеет одну степень свободы, поэтому составим одно уравнение Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q. \quad (13.22)$$

Определим кинетическую энергию системы  $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ , где  $T_1, T_4$  - кинетическая энергия грузов 1 и 4,  $T_2$  - кинетическая энергия блока 2,  $T_3$  - кинетическая энергия подвижного блока 3.

Груз 1 движется поступательно, поэтому  $T_1 = \frac{P_1}{2g} V_1^2$ , или  $T_1 = \frac{P_1}{2g} \dot{x}^2$ , где  $\dot{x}$  - обобщённая скорость.

Кинетическая энергия блока 2, вращающегося вокруг неподвижной оси:  $T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2}$ ,

где  $I_2$  - момент инерции однородного блока 2, причём  $I_2 = \frac{P_2 R^2}{2g}$ ,  $\omega_2$  - угловая скорость

блока,  $\omega_2 = \frac{\dot{x}}{R}$ .

$$\text{Тогда } T_2 = \frac{P_2 R^2}{4g} \cdot \left( \frac{\dot{x}}{R} \right)^2 = \frac{P_2 \dot{x}^2}{4g}.$$

Блок 3 совершает плоскопараллельное движение, поэтому кинетическая энергия блока 3

$$T_3 = \frac{P_3 V_C^2}{2g} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2}.$$

Скорость  $V_C$  центра масс блока выразим через обобщённую скорость  $\dot{x}$ . Точка К - мгновенный центр скоростей блока 3. Тогда справедливо соотношение  $\frac{V_L}{V_C} = \frac{LK}{CK}$ .

Учитывая, что  $V_L = \dot{x}$ ,  $LK = 2R_3$ ,  $CK = R_3$ , получим, что  $V_C = \frac{\dot{x}}{2}$ .

Угловая скорость блока 3:  $\omega_3 = \frac{V_L}{LK} = \frac{\dot{x}}{2R_3}$ .

Момент инерции блока 3:  $I_3 = \frac{P_3 R_3^2}{2g}$ .

Тогда получим, что

$$T_3 = \frac{P_3}{2g} \left( \frac{\dot{x}}{2} \right)^2 + \frac{P_3 R_3^2}{4g} \left( \frac{\dot{x}}{2R_3} \right)^2 = \frac{3}{16} \cdot \frac{P_3}{g} \dot{x}^2.$$

Кинетическая энергия груза 4, движущегося поступательно  $T_4 = \frac{P_4}{2g} V_4^2$ .

Учитывая, что скорость  $V_4$  груза 4 равна скорости  $V_C$  центра масс С подвижного

блока 3, получим  $T_4 = \frac{P_4}{2g} \left( \frac{\dot{x}}{2} \right)^2 = \frac{P_4}{8g} \dot{x}^2$ .

Окончательно, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{P_1}{2g} \dot{x}^2 + \frac{P_2}{4g} \dot{x}^2 + \frac{3}{16} P_3 \dot{x}^2 + \frac{P_4}{8g} \dot{x}^2 = \frac{11}{4} \cdot \frac{P}{g} \dot{x}^2. \quad (13.23)$$

Отсюда получим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{11}{2} \frac{P}{g} \dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{11P}{2g} \ddot{x}. \quad (13.24)$$

Перейдём к определению обобщённой силы  $Q$ . Для этого рассмотрим силы, приложенные к данной системе: сила тяжести  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$  и момент сил сопротивления, приложенный к блоку 2. Дадим грузу 1 возможное перемещение  $\delta S_1$ , при котором обобщённая координата  $x$  получит приращение  $\delta x$ , т.е.  $\delta x = \delta S_1$ . При этом блок 2 повернётся на угол  $\delta \varphi_2$ , центр масс С блока 3 получит возможное перемещение  $\delta S_3$ , груз 4 получит возможное перемещение  $\delta S_4$ . Вычислим сумму элементарных работ активных сил и момента сопротивления  $M$  на соответствующих перемещениях:

$$\delta A = P_1 \cos 60^\circ \delta S_1 - M \delta \varphi_2 - P_3 \delta S_3 - P_4 \delta S_4. \quad (13.25)$$

Возможные перемещения  $\delta S_1, \delta \varphi_2, \delta S_3$  и  $\delta S_4$  выразим через  $\delta x$ . Получим

$$\delta S_1 = \delta x, \quad \delta \varphi_2 = \frac{\delta x}{R}.$$

Учитывая, что возможное перемещение точки L  $\delta S_L = \delta x$ , имеем  $\delta S_3 = \delta S_4 = \frac{\delta x}{2}$ .

Тогда уравнение (13.25) примет вид:

$$\delta A = P_1 \cos 60^\circ \delta x - M \frac{\delta x}{R} - P_3 \frac{\delta x}{2} - P_4 \frac{\delta x}{2} = \left( \frac{P_1}{2} - \frac{M}{R} - \frac{P_3}{2} - \frac{P_4}{2} \right) \delta x.$$

Коэффициент при  $\delta x$  в полученном выражении элементарной работы является обобщённой силой  $Q$ :

$$Q = \frac{P_1}{2} - \frac{M}{R} - \frac{P_3}{2} - \frac{P_4}{2} = 1,05 P. \quad (13.26)$$

Выражения (13.24) и (13.26) подставим в уравнение (13.22):  $\frac{11}{2} \cdot \frac{P}{g} \ddot{x} = 1,05 P$ , откуда

искомое ускорение груза 1

$$a_I = \ddot{x} = \frac{2,1}{11} g = 1,87 \text{ м/с}^2.$$

### Пример 13.3

Составить уравнение движения эллиптического маятника, состоящего из ползуна 1 массы  $m_1$ , скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика 2 массы  $m_2$ , соединённого с ползуном стержнем АВ длины  $l$ .

Стержень может вращаться вокруг оси А, связанной с ползуном и перпендикулярной плоскости рисунка. Массой стержня пренебречь. Определить период малых колебаний эллиптического маятника (рис. 13.7).

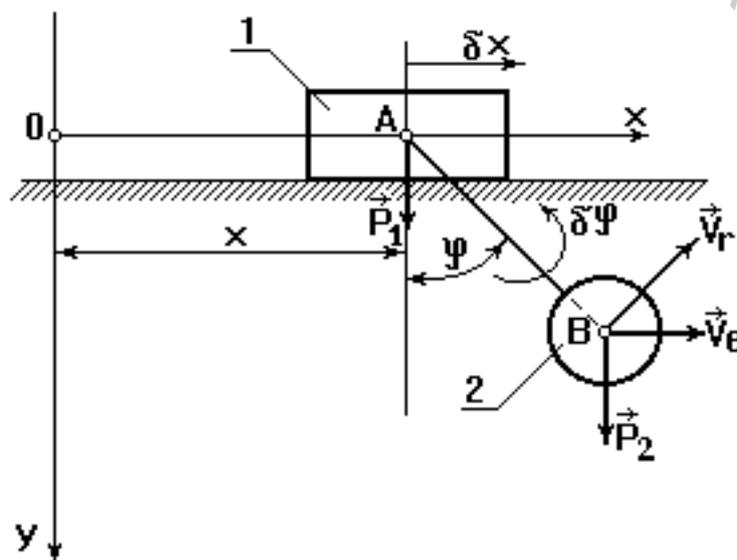


Рис. 13.7

Решение

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщённых координат перемещение ползуна по горизонтальной плоскости ( $q_1 = x$ ) и угол поворота стержня АВ вокруг оси А ( $q_2 = \varphi$ ). В соответствии с этим составим два уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \end{cases} \quad (13.27)$$

Определим кинетическую энергию системы:  $T = T_1 + T_2$ , где  $T_1$  - кинетическая энергия ползуна 1,  $T_2$  - кинетическая энергия шарика 2.

Ползун совершает поступательное движение, поэтому  $T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2$ .

Считая шарик 2 материальной точкой массы  $m_2$ , имеем, что  $T_2 = \frac{m_2}{2} V_2^2$ .

Учитывая, что шарик совершает сложное движение, для определения абсолютной скорости  $V_2$  шарика применим теорему о сложении скоростей точки:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Переносная скорость  $\vec{V}_e$  направлена параллельно оси  $x$ , при этом  $V_e = \dot{x}$ , а относительная скорость  $\vec{V}_r$  перпендикулярна радиусу относительного вращения АВ и  $V_r = l \cdot \dot{\varphi}$ . Тогда абсолютная скорость равна

$$V_2^2 = V_e^2 + V_r^2 + 2V_r \cdot V_e \cdot \cos\varphi = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \dot{\varphi} \dot{x} \cos\varphi.$$

Получим, что  $T_2 = \frac{m_2}{2} \left( \dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \dot{\varphi} \dot{x} \cos\varphi \right)$ .

Следовательно, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} \left( \dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \dot{\varphi} \dot{x} \cos\varphi \right), \text{ или}$$

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \dot{\varphi} \dot{x} \cos \varphi.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi, & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt} \left[ (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x} \cos \varphi; & \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -m_2 l \dot{\varphi} \dot{x} \sin \varphi \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x} \cos \varphi - m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (13.28)$$

Перейдём к определению обобщённых сил.

Заданными силами являются силы тяжести ползуна  $\vec{P}_1$  и шарика  $\vec{P}_2$ .

Для вычисления обобщённой силы  $Q_x$  дадим системе такое возможное перемещение, при котором обобщённая координата  $x$  получает приращение  $\delta x > 0$ , а угол поворота  $\varphi$  при этом не изменяется, т.е.  $\delta \varphi = 0$ . Сумма работ заданных сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих приращению  $\delta x$ , равна нулю, т.к. заданные

силы  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$  перпендикулярны возможному перемещению  $\delta x$ :

$$\delta A_x = 0 \text{ и } Q_x = 0. \quad (13.29)$$

Для определения обобщённой силы  $Q_\varphi$  дадим системе такое возможное перемещение, при котором угол  $\varphi$  получит приращение  $\delta \varphi > 0$ , а координата  $x$  остаётся неизменной ( $\delta x = 0$ ).

В этом случае работа силы тяжести  $\vec{P}_1$  равна нулю, а работу силы тяжести  $\vec{P}_2$  вычислим как работу силы, приложенной к стержню АВ, вращающемуся вокруг оси  $z$ , проходящей через точку А, перпендикулярно плоскости рисунка.

Момент силы  $\vec{P}_2$  относительно этой оси

$$M_z \left( \vec{P}_2 \right) = -P_2 l \sin \varphi = -m_2 g l \sin \varphi.$$

Следовательно, работа этой силы на возможном перемещении  $\delta \varphi$

$$\delta A_{\varphi} = -m_2 g l \sin \varphi \delta \varphi,$$

откуда обобщённая сила

$$Q_{\varphi} = -m_2 g l \sin \varphi. \quad (13.30)$$

Выражения (13.28), (13.29) и (13.30) подставляем в уравнения (13.27):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[ (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \right] = 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x} \cos \varphi - m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + m_2 l \dot{\varphi} \dot{x} \sin \varphi = -m_2 g l \sin \varphi, \end{cases}$$

или окончательно

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[ (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \right] = 0, \\ l \ddot{\varphi} + \cos \varphi \ddot{x} + g \sin \varphi = 0 \end{cases}, \quad (13.31)$$

Уравнения (13.31) являются дифференциальными уравнениями движения эллиптического маятника.

Для определения периода малых колебаний эллиптического маятника в уравнениях (13.31) положим, что  $\cos \varphi \approx 1$ ,  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда эти уравнения примут вид:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} = 0, \\ l \ddot{\varphi} + \ddot{x} + g \varphi = 0 \end{cases}.$$

Из первого уравнения полученной системы выразим  $\ddot{x} = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi}$ . Подставив это

значение во второе уравнение, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{l m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi} + g \varphi = 0, \text{ или} \\ \ddot{\varphi} + \frac{g (m_1 + m_2)}{l m_1} \varphi = 0. \end{aligned} \quad (13.33)$$

Это дифференциальное уравнение описывает свободные колебания эллиптического

маятника, частота которых  $k = \sqrt{\frac{g (m_1 + m_2)}{l m_1}}$ .

Тогда период этих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l}{(m_1 + m_2)g}}$$

## Глава XIV

### ТЕОРИЯ УДАРА

#### 14.1 Ударная сила и ударный импульс. Действие ударной силы на материальную точку

Ударом называется явление, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости точек твёрдого тела изменяются на конечную величину.

Сила, при действии которой происходит удар, называется ударной или мгновенной силой  $\vec{F}$ . Ударная сила в течение весьма малого промежутка времени достигает таких больших значений, что её импульс за это время становится конечной величиной.

Если сила  $\vec{F}$  действует в течение весьма малого промежутка времени  $\tau$ , то величина

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt. \quad (14.1)$$

называется ударным импульсом.

Пусть на материальную точку массой  $m$  действует ударная сила  $\vec{F}$  за время  $\tau$ , скорость точки в начале удара  $\vec{V}$ , в конце удара -  $\vec{U}$ . Тогда

$$m\vec{U} - m\vec{V} = \vec{S}, \quad (14.2)$$

т.е. изменение количества движения материальной точки за время удара равно ударному импульсу, приложенному к точке.

Уравнение (14.2) называется основным уравнением динамики точки при ударе. Из уравнения видно, что скорость точки скачкообразно меняется, т.е.

$$\vec{U} = \vec{V} + \frac{\vec{S}}{m}. \quad (14.3)$$

Ввиду того, что продолжительность удара  $\tau$  ничтожно мала, а скорость точки в течение этого промежутка времени имеет конечную величину, перемещением точки приложения ударной силы можно пренебречь.

## 14.2. Общие теоремы теории удара

Рассмотрим, какой вид принимают общие теоремы динамики системы материальных точек при ударе.

### 14.2.1. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе

Изменение количества движения механической системы за время удара равно геометрической сумме всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы:

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \sum \vec{S}_k^e, \quad (14.4)$$

где  $\vec{K}_1$  - количество движения механической системы в момент окончания действия ударных сил,  $\vec{K}_0$  - количество движения механической системы в момент начала действия ударных сил.

Векторному уравнению (14.4) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} K_{1x} - K_{0x} = \sum S_{kx}^e, \\ K_{1y} - K_{0y} = \sum S_{ky}^e, \\ K_{1z} - K_{0z} = \sum S_{kz}^e. \end{cases} \quad (14.5)$$

Количество движения механической системы можно выразить через массу  $M$  системы и скорости центра масс  $\vec{V}_c$  и  $\vec{U}_c$  (в начале удара и в конце удара) по формулам:

$$\vec{K}_1 = M \vec{U}_c, \quad \vec{K}_0 = M \vec{V}_c.$$

Тогда равенство (14.4) примет вид:

$$M \vec{U}_c - M \vec{V}_c = \sum \vec{S}_k^e. \quad (14.6)$$

### 14.2.2. Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе

Изменение кинетического момента механической системы относительно некоторого центра при ударе равно геометрической сумме моментов всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно того же центра:

$$\vec{L}_0^{(1)} - \vec{L}_0^{(0)} = \sum m_0 \vec{S}_K^e, \quad (14.7)$$

где  $\vec{L}_0^{(1)}$  - кинетический момент системы относительно некоторого центра  $O$  в момент окончания действия ударных сил;  $\vec{L}_0^{(0)}$  - кинетический момент системы относительно центра  $O$  в момент начала действия ударных сил;  $\sum m_0 \vec{S}_K^e$  - главный момент всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно центра  $O$ .

Векторному уравнению (14.7) соответствуют уравнения в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} L_x^{(1)} - L_x^{(0)} = \sum m_x (S_K^e), \\ L_y^{(1)} - L_y^{(0)} = \sum m_y (S_K^e), \\ L_z^{(1)} - L_z^{(0)} = \sum m_z (S_K^e). \end{cases} \quad (14.8)$$

### 14.3. Удар двух тел. Удар тела о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления

Процесс удара рассмотрим на примере соударения двух тел. Движение тел предполагаем поступательным (рис. 14.1).

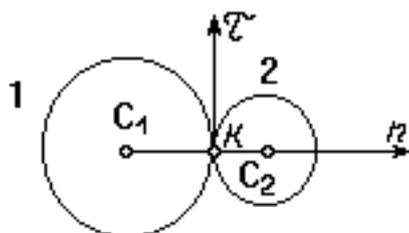


Рис. 14.1

Линией центров называется ось, проходящая через центры масс соударяющихся тел.

Удар называется центральным, если точка  $K$  соприкосновения соударяющихся тел лежит на линии центров  $C_1, C_2$  (рис.14.1).

Удар называется прямым, если скорости центров масс соударяющихся тел в начале удара лежат на линии центров (14.2).

Удар называется неупругим, если недеформированное состояние соударяющихся тел не восстанавливается. В конце удара центры масс тел движутся с одинаковыми скоростями.

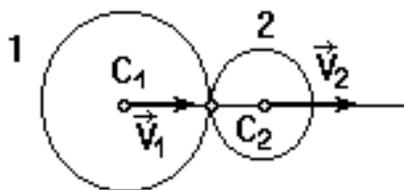


Рис. 14.2

Удар называется частично упругим, если недеформированное состояние не полностью восстанавливается. В конце удара центры масс тел движутся с разными скоростями.

Удар называется упругим, если недеформированное состояние полностью восстанавливается.

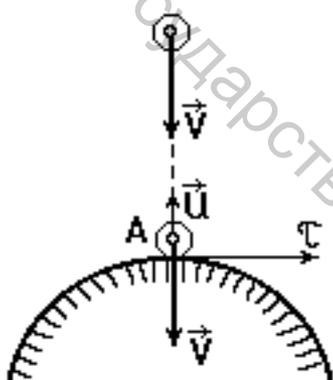


Рис. 14.3 а

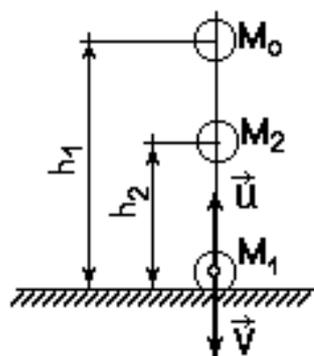


Рис. 14.3 б

Пусть тело массы  $m$  движется поступательно и скорость его центра  $\vec{V}$  направлена по нормали к неподвижной поверхности в некоторой точке  $A$ . В момент времени, когда тело достигает этой поверхности, происходит удар, называемый прямым (рис. 14.3, а).

Из-за остаточных деформаций и нагревания тела первоначальная кинетическая энергия тела полностью не восстанавливается. Поэтому тело отделяется от поверхности со скоростью  $\vec{U}$ , модуль которой меньше модуля его скорости  $\vec{V}$  до удара.

Коэффициентом восстановления при прямом ударе тела о неподвижную поверхность называется отношение модуля скорости тела в конце удара к модулю его скорости в начале удара:

$$K = \frac{|\vec{U}|}{|\vec{V}|}. \quad (14.9)$$

Коэффициент восстановления для различных материалов можно определить опытным путём. Шарик из испытуемого материала бросают без начальной скорости с высоты  $h_1$  на

массивную горизонтальную плиту из того же материала и определяют высоту  $h_2$ , на которую он поднимется после удара (рис.14.3, б).

Тогда коэффициент восстановления можно определить по формуле:

$$K = \frac{U}{V} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (14.10)$$

В случае неупругого удара  $U=0$  и  $K=0$ . При абсолютно упругом ударе  $U=V$ ,  $K=1$ . При частично упругом ударе  $0 < U < V$ ,  $K < 1$ .

Пусть скорость центра масс  $\vec{V}$  шара образует с нормалью к поверхности угол падения  $\alpha$  (рис.14.4). На основании теоремы о проекции количества движения на ось  $\tau$  имеем, что  $U_\tau = V_\tau$ .

Тогда коэффициент восстановления можно определить согласно формуле:

$$k = \frac{|U_n|}{|V_n|}. \quad (14.11)$$

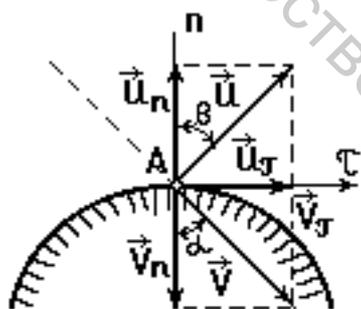


Рис. 14.4

В случае абсолютно упругого удара угол отражения  $\beta$  равен углу падения  $\alpha$ .

При частично упругом ударе угол отражения  $\beta$  больше угла падения  $\alpha$ .

#### 14.4. Потеря кинетической энергии при ударе. Теорема Карно

Из-за остаточных деформаций и нагревания двух тел при ударе происходит частичная потеря начальной кинетической энергии соударяющихся тел.

Пусть начальная кинетическая энергия тел

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2.$$

Кинетическая энергия тел в конце удара  $T = \frac{1}{2} m_1 U_1^2 + \frac{1}{2} m_2 U_2^2$ . Потеря кинетической энергии тел за время удара

$$T_0 - T = \frac{1-K}{1+K} \left[ \frac{1}{2} m_1 (V_1 - U_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2 - U_2)^2 \right].$$

Величины  $(V_1 - U_1)$  и  $(V_2 - U_2)$  представляют собой скорости, потерянные телами при ударе.

Кинетическую энергию тел, соответствующую их потерянным скоростям, обозначим  $T^*$ :

$$T^* = \frac{1}{2} m_1 (V_1 - U_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2 - U_2)^2.$$

Тогда выражение, определяющее потерю кинетической энергии тел при ударе, примет вид

$$T_0 - T = \frac{1-K}{1+K} T^*. \quad (14.12)$$

При неупругом ударе, когда  $k=0$ ,  $U_1 = U_2 = U$ , формула (14.12) принимает вид:

$$T_0 - T = T^*. \quad (14.13)$$

Формула (14.13) выражает теорему Карно: кинетическая энергия, потерянная телами при неупругом ударе, равна кинетической энергии тел, соответствующей их потерянным скоростям.

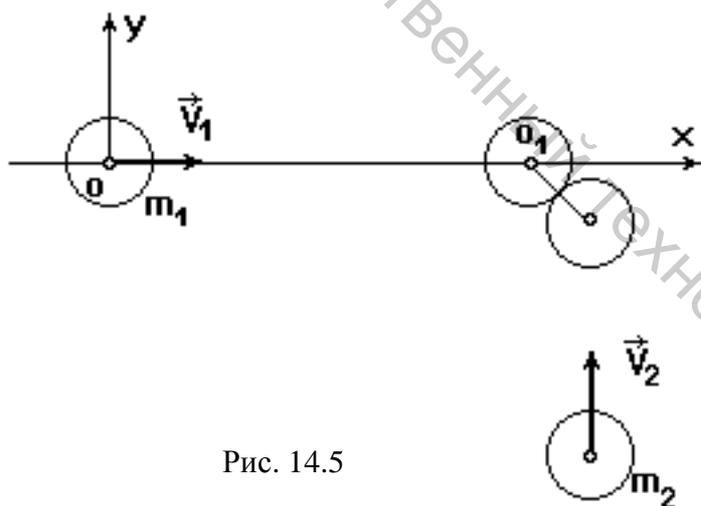


Рис. 14.5

*Пример 14.1.* Два шара с массами  $m_1$  и  $m_2$  движутся поступательно по взаимоперпендикулярным направлениям со скоростями  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$  (рис.14.5). В момент удара линия центров составляет угол  $45^\circ$  с направлениями движения шаров до удара. Считая шары идеально гладкими и коэффициент восстановления равным  $k$ , найти скорость шаров после удара.

#### Решение

Направим координатные оси  $x$  и  $y$  параллельно прямым, по которым движутся центры шаров до удара (14.5). Пусть скорость первого шара  $\vec{V}_1$  направлена по оси  $x$ . В соответствии с теоремой о сохранении количества движения системы при ударе имеем

$$\vec{m}_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{U}_1 + m_2 \vec{U}_2,$$

где  $\vec{U}_1, \vec{U}_2$  - скорости шаров после удара. Проектируя это уравнение на оси  $x$  и  $y$ , получим уравнения

$$m_1 V_1 = m_1 U_{1x} + m_2 U_{2x}, \quad (14.14)$$

$$m_2 V_2 = m_1 U_{1y} + m_2 U_{2y}. \quad (14.15)$$

Найдём нормальные проекции скоростей шаров до и после удара. При этом положительное направление нормали для каждого шара выбирается в сторону его центра, т.е.

$$V_{1n} = -V_1 \cos 45^\circ = -V_1 \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad U_{1n} = -U_{1x} \frac{\sqrt{2}}{2} + U_{1y} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$V_{2n} = -V_2 \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad U_{2n} = U_{2x} \frac{\sqrt{2}}{2} - U_{2y} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Относительные нормальные составляющие скоростей до удара и после удара по модулю соответственно равны

$$V_n = -(V_{1n} + V_{2n}) = (V_1 + V_2) \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$U_n = U_{1n} + U_{2n} = (-U_{1x} + U_{1y} + U_{2x} - U_{2y}) \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Коэффициент восстановления

$$k = \frac{U_n}{V_n} = \frac{-U_{1x} + U_{1y} + U_{2x} - U_{2y}}{V_1 + V_2},$$

тогда получаем уравнение

$$-U_{1x} + U_{1y} + U_{2x} - U_{2y} = k(V_1 + V_2). \quad (14.16)$$

Так как ударный импульс в случае идеальной гладкости шаров направлен по общей нормали к поверхностям шаров, то проекция количества движения на касательную для каждого шара при ударе не изменяется. Таким образом,

$$V_1 \tau = U_1 \tau, \quad V_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = U_{1x} \frac{\sqrt{2}}{2} + U_{1y} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{или } V_1 = U_{1x} + U_{1y}. \quad (14.17)$$

Уравнения (14.14), (14.15), (14.16) и (14.17) представляют собой систему четырёх уравнений относительно четырёх неизвестных  $U_{1x}, U_{1y}, U_{2x}, U_{2y}$ .

Решение имеет вид:

$$U_{1x} = \frac{1+2n-k}{3+n} V_1 - \frac{1+k}{3+n} V_2, \quad U_{1y} = \frac{k-n+2}{3+n} V_1 + \frac{1+k}{3+n} V_2,$$

$$U_{2x} = \frac{n^2+n-1+k}{3+n} V_1 + \frac{1+k}{3+n} V_2, \quad U_{2y} = \frac{n(k-n+2)}{3+n} V_1 + \frac{3-nk}{3+n} V_2.$$

где  $n = \frac{m_1}{m_2}$ .

В частном случае, считая удар абсолютно упругим, шары одинаковой массы и равные скорости  $V_1$  и  $V_2$ , получим ( $k=1$ ,  $n=1$ ,  $V_1 = V_2 = V$ ):

$$U_{1x} = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}V = 0, \quad U_{1y} = \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = V,$$

$$U_{2x} = \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = V, \quad U_{2y} = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}V = 0.$$

Таким образом, при ударе происходит обмен скоростями: первый шар после удара приобретает скорость, которую имел второй шар до удара, а второй шар приобретает скорость первого.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1964. – 596 с.
2. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. – М.: Высш.шк., 1974. – 528 с.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.П: Динамика. – 4-е изд. доп.– М.: Высш.шк., 1971.– 488 с.
4. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т.2:Динамика. – М.: Наука, 1985. – 464 с.
5. Тарг С.М. Курс теоретической механики.– М.: Наука, 1986.– 416 с.
6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю, Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.П: Динамика.– М.:Наука, 1990.– 624 с.
7. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. М.: Высш. шк., 1965.– 420 с.
8. Мисюров М.И. Методика решения задач по теоретической механике. М.: Высш.шк., 1962.– 308 с.
9. Теоретическая механика. Программа курса для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.: Утв.26.12.1996 НТД-40/тип.– Мн., 1996.– 26 с.
10. Локтионов А.В., Крыгина Л.Г. Теоретическая механика. Сборник заданий для контрольных работ: Уч. пособ. для студ. технических специальностей вузов. – Витебск: ВГТУ, 1998. –189 с.

**Учебное издание**

**Локтионов Анатолий Васильевич**

**Крыгина Лариса Григорьевна**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА  
ДИНАМИКА**

Учебное пособие

Редактор В.И. Ольшанский

Технический редактор И.Л. Кудина

Компьютерный набор и верстка А.Н. Голубев

Подписано в печать 04.05.2004. Формат 60x84/16. Бумага офсетная №1. Печать  
ризографическая. Гарнитура ТАЙМС. Усл. печ. л. 10,5. Тираж 500 экз.  
Заказ №206.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет».  
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный  
технологический университет». Лицензия №02330/0133005 от 1.04.2004.  
210035, Витебск, Московский проспект, 72