МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

51

УДК ~~513.8, 515~~.1

№ ГР 2001523

Инв. № ______________

УТВЕРЖДАЮ

Проректор УО ВГТУ по научной работе

____________________ С.М. Литовский

М.П.

ОТЧЕТ

о научно-исследовательской работе «Исследование алгебраических структур на многообразиях» Государственной программы фундаментальных исследований «Исследование основных математических структур и проблем математического моделирования» (шифр «Математические структуры»)

(заключительный)

2001-г/б-308

Начальник НИС С.А. Беликов

Научный руководитель,

Дфмн, проф. Ю.В. Муранов

Витебск 2005

РЕФЕРАТ

Отчет 34 с., 1 кн., 1 прил.

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА МНОГООБРАЗИЯХ

Объектом исследования являются алгебраические структуры на многообразиях, возникающие в проблеме классификации многообразий методами теории перестроек и алгебраической топологии.

Цель работы --- изучить алгебраические свойства групп препятствий и структурных множеств и исследовать их связь с геометрическими свойствами многообразия с подмногообразиями.

В процессе работы проводились исследования алгебраических свойств групп препятствий и структурных множеств и их связей с геометрическими свойствами многообразия с подмногообразиями.

В результате исследования получены новые фундаментальные результаты мирового уровня об алгебраических структурах на многообразиях, базирующиеся на глубоких связях между алгебраическими и геометрическими свойствами многообразия с системой подмногообразий.

Полученные результаты применимы в геометрической топологии, алгебраической К-теории, функциональном анализе, теории стратифицированных пространств, математической физике и физических и химических приложениях теории многообразий.

Список исполнителей

Руководитель темы,
д-р физ.-мат. наук, профессор

14.12.05 Ю.В. Муранов

подпись, дата

Технические исполнители

14.12.05 А.В. Коваленко

подпись, дата

14.12.05 О.Е. Рубаник

подпись, дата

14.12.05 О.Д. Ярыго

подпись, дата

Нормоконтролер

14.12.05 Е.Н. Муранова

подпись, дата

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Введение

Рассмотрим n-мерное связное замкнутое топологическое многобразие X^n с фундаментальной группой $\pi = \pi_1(X)$ и гомоморфизмом ориентации $w : \pi \to \{\pm 1\}$. Основной вопрос геометрической топологии состоит в описании всех возможных замкнутых (гладких, кусочно-линейных) топологических многообразий, которые (просто) гомотопически эквивалентны X. Эта проблема восходит к классической Гипотезе Пуанкаре "Гомеоморфна ли гомотопическая 3-х мерная сфера стандартной."

Для решения этого вопроса о классификации многообразий вводится в рассмотрение структурное множество классов эквивалентности (простых) гомотопических эквивалентностей $h\colon M \to X$, сохраняющих ориентацию, где M — замкнутое связное n-многообразие соответствующей категории (O, PL, TOP).

Две простых гомотопических эквивалентности $f_i : M_i \to X (i = 0, 1)$ эквивалентны, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм многообразий $g : M_0 \to M_1$, для которого $f_1 g$ гомотопно f_0. Множество классов эквивалентности обозначается $\mathcal{S}_n^s(X)$ и входит в точную последовательность теории перестроек

$$\cdots \to [\Sigma X, G/TOP] \stackrel{\sigma_{n+1}}{\to} L_{n+1}(\pi, w) \to \mathcal{S}_n^s(X) \to [X, G/TOP] \stackrel{\sigma_n}{\to} L_n(\pi, w).$$

Аналогичная точная последовательность имеет место и для случая гладких или кусочно-линейных структур на многообразии X. Группы препятствий к перестройкам $L_n(\pi, w)$ функториально зависят от пары (π, w) и размерности многообразия n mod 4. Отображение σ задает препятствие к перестройке нормального отображения до простой гомотопической эквивалентности.

Таким образом для описания структурного множества $\mathcal{S}_n^s(X)$ необходимо знать множество нормальных инвариантов, группы препятствий к перестройкам $L_n(\pi, w) = L_n^s(\pi, w)$ и отображение σ (ассембли отображение). Исследование ассембли отображения связанно с гипотезой Новикова о высших сигнатурах, с вопросом о реализации элементов L-групп нормальными отображениями замкнутых многобразий и рядом других классических проблем теории перестроек.

Пусть в многообразии X задано подмногообразие $Y \subset X$ коразмерности q. Тогда точная последовательность теории перестроек может быть включена в различные коммутативные диаграммы точных последовательностей. Полученные связи дают много дополнительной информации и весьма полезны как с алгебраической так и с геометрической точки зрения, так как большинство объектов и отображений имеют явное геометрическое описание. Основное место в этом рассмотрении занимает проблема расщепления простой гомотопической эквивалентности $f : M \to X$ вдоль подмногообразия Y.

По определению, простая гомотопическая эквивалентность $f : M \to X$ расщепляется вдоль подмногообразия Y, если отображение f гомотопно трансверсальному к Y отображению g с $N = g^{-1}(Y)$, такому что отображения

$$g|_N : N \to Y, \quad g|_{(M \setminus N)} : M \setminus N \to X \setminus Y$$

являются простыми гомотопическими эквивалентностями.

Обозначим через ∂U границу трубчатой окрестности U подмногообразия Y в многообразии X и через

$$F = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U) & \to & \pi_1(X \setminus Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(Y) & \to & \pi_1(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \to & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \to & D \end{pmatrix}$$

квадрат фундаментальных групп с ориентацией, в котором все отображения индуцированы естественными отображениями многообразий. Квадрат F является универсально-отталкивающим квадратом групп по теореме Ван-Кампена. Для простой гомотопической эквивалентности $f : M \to X$ определено препятствие $\Theta(f) \in LS_{n-q}(F)$, которое равно нулю, если отображение f расщепляется вдоль Y, и обратно, если $\Theta(f) = 0$ и $n-q \geq 5$, то f расщепляется вдоль Y.

Если горизонтальные отображения в квадрате F являются изоморфизмами $A \cong C, B \cong D$, то группы $LS_*(F)$ обозначаются через $LN_*(A \to B)$. В случае односторонних подмногообразий (коразмерность $q = 1$) группы $LN_*(A \to B)$ называются группами Браудера-Ливси и применяются во многих задачах геометрической топологии. Для нормального отображения $(f, b) : M \to X$ определены также группы препятствий $LP_{n-q}(F)$ к перестройкам пары многообразий (M, N) до получения простой гомотопической эквивалентности пар.

Глубокие связи между различными алгебраическими объектами, возникающими при классификации геометрических структур на паре многообразий, можно получить используя алгебраические походы, базирующиеся на использовании спектров в теории перестроек.

Спектр E состоит из семейства клеточных пространств $(E_n, *), n \in \mathbb{Z}$, заданных вместе с семейством клеточных отображений $(\epsilon_n : SE_n \to E_{n+1})$, где SE_n обозначает надстройку пространства E_n.

Кэппел и Шейнсон в конце 70-х годов прошлого века поставили вопрос о существовании спектральной последовательности, связанной с задачей расщепления простой гомотопической эквивалентности вдоль одностороннего подмногообразия и теорией перестроек. Такая спектральная последовательность была построена Хэмблтоном и Харшиладзе. Эта спектральная последовательность является естественным алгебраическим объектом, тесно связанным с инвариантами Браудера-Ливси и вопросом о реализации элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий.

Рассмотрим одностороннее подмногообразие X в $(n+1)$-мерном многообразии Y, для которого вложение $X \subset Y$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Группа Браудера-Ливси $LN_n(\pi \to G, w)$ задает группу препятствий к расщеплению простой гомотопической эквивалентности $f : M \to Y$ вдоль подмногообразия X. Харшиладзе и Хэмблтоном была построена спектральная последовательность с первым членом

$$E_1^{p,q} = LN_{q-2p-2}(\pi \to G^{(-)^p}) = LN_{q+2}(\pi \to G)$$

и первым дифференциалом, совпадающим с композицией $i^! t^{-1} \circ t i_*$. Высшие дифференциалы этой спектральной последовательности записываются в виде $i^! t^{-1} \circ \Gamma^k \circ t i_*$ и совпадают с итерированными инвариантами Браудера-Ливси.

Приложение 1

Список публикаций по теме исследований

1. Cavicchioli A., Muranov Y. V., Repovš D., *Algebraic properties of surgery obstruction groups*, Boll. Un. Mat. Ital. **8** (2001), no. 4-B, 647–675.

2. Малешич Й., Муранов Ю.В., Реповш Д., *Группы препятствий к расщеплению в коразмерности 2*, Математические заметки **69** (2001), no. 1, 52–73.

3. Муранов Ю. В., Реповш Д., *Группы LS и морфизмы квадратичных расширений*, Мат. заметки **70** (2001), 419–424.

4. Yu. V. Muranov, D. Repovs, F. Spaggiari, *Surgery on triples of manifolds*, Preprint University of Ljubljana, 2002, Vol. 40, no. 811, P. 1–17.

5. R. Jimenez, Yu. V. Muranov., *Surgery transfer maps for triples of manifolds*, Publications Preliminaries del Instituto de Matematicas-Cuernavaca. Mexica. No. 721. 2002.

6. Ю.В. Муранов, Д. Реповш, *Геометрические свойства спектральной последовательности теории перестроек*, Успехи математических наук **57** (2002), 191–192.

7. А.Бак, Ю.В. Муранов, *Расщепление вдоль подмногообразий и L-спектры*, Современная математика и приложения. Топология, анализ и смежные вопросы **1** (2003), Академия наук Грузии, Институт кибернетики, Тбилиси, 3–18.

8. Ю.В. Муранов, Д. Реповш, Ф. Спаггиари, *Перестройка троек многообразий*, Математический сборник **8** (2003), 139–160.

9. A. Cavicchioli, Y.V. Muranov, D. Repovš, *On a certain surgery spectral sequence*, JP Journal Geometry & Topology **3** (2003), 1–27.

10. Yu.V. Muranov, D. Repovš, *Geometric properties of the surgery spectral sequence*, Preprint University of Ljubljana, N 856 **41** (2003), 1–7.

11. Rolando Jimenez, Y.V. Muranov, D. Repovš, *Surgery spectral sequence and stratified manifolds* **42** (2004), Preprint University of Ljubljana, N. 935. IMFM, 1–33.

12. Matija Cencelj, Y. V. Muranov, D. Repovš, *On splitting problem for manifold with boundaries*, Preprint University of Ljubljana, N. 936. IMFM **42** (2004), 1–22.

13. A. Bak, Yu. V. Muranov, *Splitting along submanifolds and L-spectra*, Journal of Mathematical Sciences, Issue 4 **123** (2003), 4169–4184.

14. Ю.В. Муранов, *Классификация многообразий различных категорий* (2003), Сборник докладов V научно-методической конференции студентов и преподавателей ВФ УО "ИСЗ", Витебск, 262–263.

15. Е.Н. Муранова, *Структуры на L-группах для систем многообразий* (2003), Сборник докладов V научно-методической конференции студентов и преподавателей ВФ УО "ИСЗ", Витебск, 261–262.

16. Ю.В. Муранов, *Спектральные последовательности в эрмитовой K- теории*, Материалы VIII Международной научно-методической конференции "Наука и образование в условиях социально- экономической трансформации общества", Витебск, 19-20 мая 2005, 350-352.

17. Муранова Е.Н., *Алгебраические структуры на графах и свойства химических соединений*, Материалы VIII Международной научно- методической конференции "Наука и образование в условиях социально- экономической трансформации общества", Витебск, 19-20 мая 2005, 221-223.

18. Rolando Jimenez, Yu.V. Muranov, Dusan Repovs, *Splitting along a submanifold pair* **43** (2005), no. 974, Preprint University of Ljubljana, 1-17.

19. Matija Cencelj, Yuri V. Muranov, Dušan Repovš, *On $\pi-\pi$ theorem for manifold pairs with boundaries* . **43** (2005), no. 977, Preprint University of Ljubljana, 1-9.

20. A. Cavicchioli, Yuri V. Muranov, F. Spaggiari, *Relative objects in surgery theory*, Bulletin of the Belgian Math. Society-Simon Stevin **12** (2005), 109-135.

21. Rolando Jimenez, Yu.V. Muranov, *Homotopy triangulations of a triple of manifolds*, Morphismos **8** (2004), no. 2.

22. Иванков П.Л., Муранов Ю.В., Статковский Н.С., *Методические указания и индивидуальные задания по дифференциальным уравнениям*, Витебск. ВГТУ. 2001. 30 стр.

23. Муранов Ю.В., Иванков П. Л., Рубаник О. Е., *Методические указания по курсу линейного программирования*, Витебск. ВГТУ. 2002. 40 стр.

24. М.А. Васильев, П.Л. Иванков, И.М. Котин, Ю.В. Муранов, *Сборник контрольных заданий по линейной алгебре и аналитической геометрии (для студентов экономических специальностей)* (2004), Витебский филиал ЧУО ИСЗ, 1–19.

25. М.А. Васильев, П.Л. Иванков, Ю.В. Муранов, *Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре, ч. I* (2004), Витебский филиал ЧУО ИСЗ, 1–65.

26. Yu.V. Muranov, *Geometric properties of the surgery spectral sequence* (2003), Abstracts of 3-Poznan Workshop on Transformation Groups, Poznan, Poland, www.astagor.net/bak/.

27. Rolando Jimenez, Yurij V. Muranov, *Homotopy triangulations of a manifold triple* (2003), Abstracts of 3-Poznan Workshop on Transformation Groups,, Poland, Poznan www. astagor. net /bak/.

28. Rolando Jimenez, Yurij V. Muranov, *Surgery transfer maps for triples of manifolds* (2003), Abstracts of International Conference, Helsinki, Finland, www. astagor. net /illman/.

29. Yu.V. Muranov, *Surgery exact sequence and splitting problem*, Abstracts of International Conference Kolmogorov and Contemporary Mathematics, Moscow, 2003, 829–830.

30. Ю.В. Муранов, *Математика и высшая математика* (2004), Сборник докладов международной конференции. Математическое образование: современное состояние и перспективы. Могилев, 169–171.

31. Rolando Jimenez, Yuri Muranov, *Homotopy triangulations of a triple of manifolds* (2004), Abstracts of International Conference Geometric Topology, Discrete Geometry and Set Theory, Steklov Mat. Insitute, Moscow, 26.

32. Yu.V. Muranov, *Surgery on manifold with filtration* (2004), Abstracts of International Conference Geometric Topology, Discrete Geometry and Set Theory, Steklov Mat. Insitute, Moscow, 31–32.

33. Yu.V. Muranov, *Browder-Quinn obstruction groups and surgery spectral sequence* (2004), Тезисы. IX Белорусская математическая конференция, Гродно, Часть 2, 75.

34. Yu.V. Muranov, *On Mixed structures for a manifold with boundary*, Abstracts International Conference "Topology, Analysis and Application to Mathematical Physics", Moscow, 14-18 February 2005, 49.

35. Yu. V. Muranov, *Browder-Livesay invariants and surgery spectral sequence*, Algebraic K- and L-theory of Infinite Groups. International Conference, Edinburgh, 27 June - 1 July 2005; www.icms.org. uk /meetings /2005 /klig /sci_prog.html.

Принятые в печать статьи.

36. Ю.В. Муранов, Д. Реповш, Роландо Хименез, *Спектральная последовательность в теории перестроек и многообразия с фильтрацией*, Труды Московского математического общества (2006), 36 стр.

37. Matija Cencelj, Yuri V. Muranov, Dušan Repovš, *One the splitting problem for manifold pairs with boundaries*, Abhadlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg (2005), 21 стр.

38. Ю.В. Муранов, Роландо Хименез, *Структурные множества тройки многообразий*, J. of Fundamental and Applied Mathematics, 19 стр.

39. A.Cavicchioli, Yu.V. Muranov, F. Spaggiari, *Mixed structures on a manifold with boundary*, Glasgow Math. Journal, 19 стр.

40. Ю.В. Муранов, Роландо Хименез, *Отображения трансфера для троек многообразий*, Математические заметки, 16 стр.

41. А. Бак, Ю.В. Муранов, *Нормальные инварианты пар многообразий и сигнатурные отображения*, Математический сборник, 19 стр.