$d = d(x_1, x_2, x_3)$ при помощи градиентного подъема, получаем следующий результат:

$$d_{\max} = d(0{,}53084977;\ 0{,}88321418;\ 1) = 0{,}0000050398.$$

Подставляя соответствующие значения x_1, x_2, x_3, d в систему уравнений (3), находим, что $a = -\,0{,}166566806,\quad b = 0{,}\,00842827.$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\left|\sin x - x + 0{,}166566806x^3 - 0{,}008042827x^5\right| \le d_{\max} \quad \left(x \in [0,\ 1]\right). \qquad (5)$$

В качестве приложения неравенства (5) можно рассмотреть решение двухточечной краевой задачи $x(0) = x(1) = 0$ для уравнения (1). Применяя метод функций Грина ([4], с. 302), осуществляем переход к интегральному уравнению

$$x(t) = \frac{g}{l}(1-t)\int_0^t s\left[x(s) + ax^3(s) + bx^5(s)\right]ds \; +$$

$$+\frac{g}{l}t\int_t^1 (1-s)\left[x(s) + ax^3(s) + bx^5(s)\right]ds \;. \qquad (6)$$

Интегральное уравнение (6) решается чаще всего итерационным методом.

Заключение. Применяя алгоритм построения полинома наилучшего приближения, основанный на максимизации функции $d = d(x_1, x_2, x_3)$, получаем способ аппроксимации синуса с учетом априорной информации, т.е. с учетом сохранения нечетности синуса и особенностей его поведения в нуле. Построенный таким образом полином наилучшего приближения может быть использован в самых различных ситуациях, например, для решения двухточечной краевой задачи для уравнения математического маятника.

Список литературы

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. Коллатц, Л. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения / Л. Коллатц, В. Крабс. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. Трубников, Ю.В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – М.: Астропресс – XXI, 2002. – 256 с.
4. Красносельский, М.А. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Физматгиз, 1962. – 396 с.

МИНИМИЗАЦИЯ НОРМЫ ФУНКЦИИ $P(z) = \dfrac{1}{z} + c$

Ю.В. Трубников[1], В.В. Силивончик[2]

[1]Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова,

[2]Витебск, ВГТУ

При построении итерационных процессов возникает проблема оптимизации параметров процесса. С этой целью исследуется вопрос минимизации нормы [1] комплексной функции $P(z)=\frac{1}{z}+c$. Функция $P(z)$ рассматривается на замкнутом подмножестве комплексной плоскости M. Норма функции определяется равенством

$$\| P(z)\|_M=\max_{x\in M}|P(z)|.$$

Норма зависит от параметра c и требуется найти значение параметра, минимизирующее значение нормы. Это оптимальное значение параметра обозначим через c_M^*, а минимальное значение нормы – через r_M^*. Тогда

$$P_M^*(z)=\frac{1}{z}+c_M^*,\quad r_M^*=\min_c\| P(z)\|_M=\| P_M^*(z)\|_M=\|\frac{1}{z}+c_M^*\|_M.$$

Ниже будут рассмотрены три случая: 1) M состоит из двух точек z_1, z_2; 2) M является отрезком; 3) M является прямоугольником.

Материал и методы. Используется критерий [2] для оптимизации выпуклого функционала, в качестве которого рассматривается норма комплексной функции, зависящей от параметра, на конечном множестве точек. Для получения оптимальной функции на непрерывном множестве сначала строится оптимальная функция на некотором подходящем конечном множестве.

Результаты и их обсуждение.

1. Минимизация на двухточечном множестве.

Предложение 1. Пусть $M=M_1=\{z_1;z_2\}$ $(z_1\neq z_2)$. Тогда

$$c_{M_1}^*=-\frac{z_1+z_2}{2z_1z_2}|,\ r_{M_1}^*=\frac{|z_1-z_2|}{2|z_1z_2|}. \quad \textbf{(1)}$$

2. Минимизация на отрезке $[z_1;z_2]$, не содержащем току $z=0$. Пусть $M_1=\{z_1;z_2\},\ ,M_2=[z_1;z_2]$ $(z_1\neq z_2,\ 0\notin[z_1;z_2])$. Решим задачу оптимизации на множестве M_1 и получим оптимальные параметры $c_{M_1}^*$ и $r_{M_1}^*$ по формулам (1). Рассмотрим линию уровня $|P_{M_1}^*(z)|=r_{M_1}^*$ или $|\frac{1}{z}+c_{M_1}^*|=r_{M_1}^*$. Преобразовав, получаем $|1+c_{M_1}^*z|=r_{M_1}^*|z|$ или

$$1+c_{M_1}^*z+\overline{c}_{M_1}^*\overline{z}+(|c_{M_1}^*|^2-r_{M_1}^{*\,2})|z|^2=0.$$

Возможны различные случаи.

Предложение 2. **Пусть $|c_{M_1}^*|=r_{M_1}^*$ (это значит, что $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$). Тогда справедливы равенства:**

$$c_{M_2}^*=c_{M_1}^*=-\frac{z_1+z_2}{2z_1z_2},\quad r_{M_2}^*=r_{M_1}^*=\frac{|z_1-z_2|}{2|z_1z_2|}=\frac{|z_1+z_2|}{2|z_1z_2|}.$$

Предложение 3**. Пусть $|c_{M_1}^*|<r_{M_1}^*$, т.е. $|z_1+z_2|<|z_1-z_2|$. Тогда справедливы равенства**

$$c_{M_2}^*=\frac{\overline{z}_1-\overline{z}_2}{z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2},\quad r_{M_2}^*=\frac{|\overline{z}_1-\overline{z}_2|}{|z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2|}. \quad \textbf{(2)}$$

Предложение 4. **Пусть** $|c^*_{M_1}| > r^*_{M_1}$**, т.е.** $|z_1+z_2| \ > \ |z_1-z_2|$**. Тогда справедливы равенства**

$$c^*_{M_2} = c^*_{M_1} = -\frac{z_1+z_2}{2z_1z_2}, \quad r^*_{M_2} = r^*_{M_1} = \frac{|z_1-z_2|}{2|z_1z_2|},$$

повторяющие равенства (1).

3. Минимизация на отрезке $[z_1; z_2]$, не содержащем току $z=0$. Пусть M_3 – прямоугольник с вершинами z_1, z_2, z_3, z_4. Поворотом системы координат всегда можно добиться того, чтобы прямоугольник лежал в правой полуплоскости и пересекался с первой четвертью. Поэтому без ограничения общности считаем

$$z_1 = a_1 + ib_1, \ z_2 = a_1 + ib_2, \ z_3 = a_2 + ib_1, \ z_4 = a_2 + ib_2;$$

$$a_2 > a_1 > 0, \quad b_2 > b_1, \quad b_2 > 0.$$

Предложение 5. При выполнении условия $|z_1+z_2| \ \le \ |z_1-z_2|$ получаем повторение равенств (2):

$$c^*_{M_3} = -\frac{z_1+z_2}{2z_1z_2}, \quad r^*_{M_3} = \frac{|\overline{z}_1-\overline{z}_2|}{|z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2|}.$$

Лемма. Если $b_1>0$, то неравенства

$$a_1(b_2-b_1)^2-(a_1^2+b_1b_2)(a_2-a_1)\ge 0, \ \ b_1(a_2-a_1)^2-(b_1^2+a_1a_2)(b_2-b_1)\ge 0.$$

не могут выполняться одновременно.

Предложение 6. Если выполняются два условия

$$|z_1+z_2|>|z_1-z_2|, \quad a_1(b_2-b_1)^2-(a_1^2+b_1b_2)(a_2-a_1)\ge 0,$$

то справедливы равенства

$$c^*_{M_3} = \frac{\overline{z}_1-\overline{z}_2}{z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2}, \quad r^*_{M_3} = \frac{|z_1-z_2|}{2|z_1z_2|}.$$

Если выполняются три условия

$$b_1>0, \quad |z_1+z_3|>|z_1-z_3|, \quad b_1(a_2-a_1)^2-(b_1^2+a_1a_2)(b_2-b_1)\ge 0,$$

то справедливы равенства

$$c^*_{M_3} = \frac{\overline{z}_1-\overline{z}_3}{z_1\overline{z}_3-\overline{z}_1z_3}, \quad r^*_{M_3} = \frac{|z_1-z_3|}{2|z_1z_3|}.$$

Предложение 7. Пусть выполняются два условия

$$a_1(b_2-b_1)^2-(a_1^2+b_1b_2)(a_2-a_1)<0, \quad b_1(a_2-a_1)^2-(b_1^2+a_1a_2)(b_2-b_1)<0.$$

Тогда для трёхточечного множества $M=\{z_1,z_2,z_3\}$ справедливы равенства

$$c^*_{M_3} = -\frac{\overline{z}_2+\overline{z}_3}{2\operatorname{Re} z_2\overline{z}_3} = -\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_4}{2\operatorname{Re} z_1\overline{z}_4}, \quad r^*_{M_3} = \frac{|z_2-z_3|}{2\operatorname{Re} z_2\overline{z}_3} = \frac{|z_1-z_4|}{2\operatorname{Re} z_1\overline{z}_4}. \qquad \textbf{(1)}$$

Предложение 8. Пусть выполняются два условия

$$a_1(b_2-b_1)^2-(a_1^2+b_1b_2)(a_2-a_1)<0, \quad b_1(a_2-a_1)^2-(b_1^2+a_1a_2)(b_2-b_1)<0.$$

Тогда для прямоугольника M_3 справедливы равенства, повторяющие (1):

$$c^*_{M} = -\frac{\overline{z}_2+\overline{z}_3}{2\operatorname{Re} z_2\overline{z}_3} = -\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_4}{2\operatorname{Re} z_1\overline{z}_4}, \quad r^*_{M} = \frac{|z_2-z_3|}{2\operatorname{Re} z_2\overline{z}_3} = \frac{|z_1-z_4|}{2\operatorname{Re} z_1\overline{z}_4}.$$

Таким образом, полностью решена задача оптимизации нормы

$\| P(z) \| = \| \dfrac{1}{z} + c \|$ на произвольном прямоугольнике, не содержащем точку $z = 0$.

Список литературы

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – Наука, 1977. – 511 с.
2. Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач /А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1976. – 480 с.

МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПТКС ТЕРМОРЕЗИСТОРАХ

В.Н. Шут[1, 2], А.В. Гаврилов[1], Д.А. Ильющенко[3]
[1]Витебск, ИТА НАН Беларуси
[2]Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова
[3]Витебск, ОАО ВЗРД «МОНОЛИТ»

Терморезисторы с положительным температурным коэффициентом сопротивления (ПТКС) на основе керамики титаната бария, легированной редкоземельными элементами нашли широкое применение электротехнике и радиоэлектронике [1]. Физической основой возникновения ПТКС эффекта в таких материалах является изменение высоты зернограничных барьеров Шоттки при фазовом переходе. Во многих случаях ПТКС-терморезисторы (позисторы) используются в силовых цепях в качестве нагревательных, пусковых элементов, в схемах защиты от перегрузок по току и напряжению и др. При этом терморезисторы могут разрушаться в результате воздействий больших токовых нагрузок по механизму расслоения на две практически равные половинки в плоскости параллельной электродам [2]. Большие токи вызывают неравномерный разогрев позистора. Причем наибольшие градиенты температур (свыше 40 градусов) реализуются по толщине керамического элемента (вдоль линии тока) и обусловлены аномальным изменением теплоемкости и электросопротивления материала при фазовом переходе, т.е. имеют фундаментальный характер. Вследствие этого, в позисторной керамике возникают существенные термоупругие растягивающие напряжения. Величины этих напряжений могут достигать 100 МПа [3, 4], что соизмеримо с пределом прочности полупроводниковой керамики на основе титаната бария 50-100 МПа [5].

Важной задачей для разработчиков и производителей ПТКС-терморезисторов является повышение устойчивости позисторов к тепловому удару в процессе нагрева электрическим током. Особый интерес вызывает разработка методов по уменьшению температурных напряжений, так как улучшение механических (прочностных) свойств позисторной керамики без ухудшения электрических характеристик является трудно выполнимой задачей. Ранее был предложен способ повышения устойчивости терморезисторов к электрическим нагрузкам, основанный на формировании многослойных структур, в которых приэлектродные слои имеют более высокое удельное сопротивление при температурах ниже фазового перехода, за счет чего обеспечивается выравнивание теплового поля в объеме материала и значительное снижение растягивающих напряжений [6]. Однако для изготовления таких элементов требуется введение дополнительных операций послойного прессования, что усложняет процесс производства. В данной работе рассмотрен метод коррекции тепловых полей и снижения термоупругих напряже-