УДК 517.988

Дифференциальный аналог итерационного процесса Вейерштрасса

Ю.В. Трубников*, О.В. Пышненко*, В.В. Силивончик**

**Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

***Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»*

В статье конструируется дифференциальный аналог итерационного процесса Вейерштрасса одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения и изучаются его разнообразные свойства. В теореме 1 доказано, что подмножество пространства начальных условий, для которого все траектории стремятся к одной из перестановок корней, является открытым и связным, при этом отображение данного подмножества на множество значений коэффициентов уравнения является диффеоморфизмом. Найдена система инвариантов такого процесса; доказана асимптотическая устойчивость по Ляпунову состояний равновесия; исследованы вопросы продолжимости решений. Численные примеры показывают высокую эффективность этого процесса: задача Коши, решаемая для соответствующей системы дифференциальных уравнений, имеет траекторию, быстро приближающуюся к вектору корней алгебраического уравнения при «почти любых» начальных условиях. В теореме 2 результаты теоремы 1 обобщаются для дифференциального аналога итерационного процесса Ньютона–Канторовича в общем случае.

Ключевые слова: *полином, итерационный процесс, метод Ньютона–Канторовича, дифференциальный аналог метода Вейерштрасса, банахово пространство, устойчивость по Ляпунову.*

Differential analogue of iteration Veierstrass process

Y.V. Trubnikov*, O.V. Pyshnenko*, V.V. Silivonchik**

**Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»*

***Educational establishment «Vitebsk State Technological University»*

Differential analogue of iteration Veierestrass process of simultaneous finding all roots of an algebraic equation is constructed in the article and its different peculiarities are studied. In Theorem 1 it is proved that submultitude of the space of initial conditions, for which all trajectories aim at one of the rearrangements of roots, is open and bound, the reflection of this submultitude on the multitude of coefficient indications of the equation being diffeomorphism. System of invariants of such process is found; asymptotic stability according to Lyapunov of equilibrium states is proved; issues of continuity of solutions are studied. Numeric examples show high efficiency of such process: Koshy task, which is solved for the corresponding system of differential equations, has a trajectory, which approaches quickly the vector of roots of the algebraic equation at «almost any» initial condition. In Theorem 2 results of Theorem 1 are summarized for a differential analogue of iteration Newton–Kantorovich process in a general case.

Key words: *polynome, iteration process, Newton–Kantorovich method, differential analogue of Veierstrass method, banakh space, stability according to Lyapunov.*

Итерационный алгоритм Вейерштрасса предназначен для одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения

$$P_n(z) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

с комплексными коэффициентами в случае отсутствия кратных корней.

Пусть

$$\omega(t) = (t - z_1)(t - z_2) \cdot \ldots \cdot (t - z_n),$$

тогда расчетные формулы алгоритма Вейерштрасса имеют вид

$$z_j(k+1) = z_j(k) - \frac{P_n\left[z_j(k)\right]}{\omega'\left[z_j(k)\right]}$$

$$(1 \le j \le n, \ \ k = 1, 2, \ldots).$$

Наблюдения за численными экспериментами, проведенными с применением алгоритма Вейерштрасса, показали нелокальный характер сходимости, т.е. векторная последовательность

$z_j(k) \quad (1 \le j \le n, \;\; k = 1,2,..)$ сходится к некоторой перестановке корней уравнения $P_n(z) = 0$ при «почти любых» начальных значениях. Однако доказательство факта такой нелокальной сходимости уже для кубического уравнения весьма затруднительно. Авторы настоящего исследования предлагают использовать дифференциальный аналог итерационного процесса Вейерштрасса, т.е. применять для нахождения всех корней алгебраического уравнения систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_j}{dt} = -\frac{P_n\left[z_j(t)\right]}{\omega'\left[z_j(t)\right]}.$$

В статье устанавливаются особенности поведения решений такой системы дифференциальных уравнений и нелокальный характер сходимости вектора $z_j(t) \quad (1 \le j \le n)$ при $t \to \infty$ к некоторой перестановке корней алгебраического уравнения.

Кроме того, доказаны некоторые общие свойства операторного дифференциального уравнения вида

$$\frac{dz}{dt} = -\left[F'(z)\right]^{-1} \cdot F(z).$$

Материал и методы. Объектами исследования являются алгебраические уравнения, итерационные процессы Вейерштрасса, Ньютона–Канторовича и их дифференциальные аналоги. В качестве методов используются топологические, аналитические методы исследования и некоторые общие теоремы функционального анализа. Вычисления проводились при помощи пакета символьной математики *Maple* 15.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{1}$$

с комплексной переменной z и постоянными комплексными коэффициентами

$$a_j \quad (j = 1,2,\dots,n).$$

Предположим, что дискриминант уравнения (1) не равен нулю. Тогда уравнение (1) имеет n различных корней.

Произвольный набор комплексных чисел

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

порождает алгебраическое уравнение

$$z^n + u_1 z^{n-1} + \dots + u_{n-1} z + u_n = 0 \tag{2}$$

с коэффициентами $u_1, u_2, \dots, u_n$, в котором корни $z_1, z_2, \dots, z_n$ и коэффициенты $u_1, u_2, \dots, u_n$ связаны равенствами Виета:

$$\begin{cases} u_1 = -z_1 - z_2 - \dots - z_n, \\ u_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n, \\ \quad \dots \\ u_n = (-1)^n z_1 z_2 \dots z_n. \end{cases} \tag{3}$$

В статье показано, как с помощью дифференциального аналога процесса Вейерштрасса [1, с. 52] построить траекторию

$$z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$$

корней уравнения (2) и соответствующую ей траекторию коэффициентов

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$$

так, что при $t \to \infty$ вектор $\left(z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\right)$ сходится к некоторой перестановке корней уравнения (1).

Введем обозначения:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$
$$U = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$
$$Z = (z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Дискриминант уравнения (2) обозначим через $DIS(U)$, т.е.

$$DIS(U) = \prod_{i<j} \left(z_i - z_j\right)^2 = f(u_1, u_2, \dots, u_n), \tag{4}$$

где $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ является алгебраическим многочленом переменных $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Рассматривая $z_1, z_2, \dots, z_n$ как независимые переменные, мы можем ввести отображение

$$U = F(Z), \tag{5}$$

определяемое равенствами (3). Независимо от перестановки корней уравнения (2) справедливо равенство:

$$DIS(U) = DIS\left[F(Z)\right] = \prod_{i<j} \left(z_i - z_j\right)^2.$$

Пусть $F'(Z)$ – производная отображения (5). Основным изучаемым в данной статье объектом является операторное дифференциальное уравнение

$$\dot{Z}(t) = -\left\{F'\left[Z(t)\right]\right\}^{-1} \left\{F\left[Z(t)\right] - A\right\}, \tag{6}$$

т.е. естественный дифференциальный аналог метода Ньютона–Канторовича.

Сделаем замену переменной Z по формуле (5). Тогда

$$\begin{aligned} \dot{U} &= F'(Z) \cdot \dot{Z} = \\ &= -F'(Z)\left[F'(Z)\right]^{-1}\left[F(Z) - A\right] = \\ &= -F(Z) + A = -U + A, \end{aligned}$$

т.е. функция $U(t)=F\left[Z(t)\right]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{U}(t)=-U(t)+A. \qquad (7)$$

Таким образом, если $Z(t)$ является решением уравнения (6), то соответствующий набор коэффициентов уравнения (2) является решением уравнения (7).

Представляет интерес, на наш взгляд, изучение структуры множества тех начальных значений Z_0, при которых имеет место равенство

$$\lim_{t\to\infty} Z(t;Z_0)=IZ_A, \qquad (8)$$

где Z_A – некоторый фиксированный набор корней уравнения (1), IZ_A – произвольная перестановка компонент этого набора.

Пусть

$Z_0=(z_{10},z_{20},\dots,z_{n0})$, $U_0=(u_{10},u_{20},\dots,u_{n0})$ – начальные условия, а $Z(t;Z_0)$ и $U(t;U_0)$ – соответствующие решения уравнений (6) и (7). Множества начальных условий обозначим через C_Z^n и C_U^n, а символами Σ_Z и Σ_U – множества в пространствах C_Z^n и C_U^n, определяемые условиями:

Σ_Z – множество тех начальных значений Z_0, для которых существует хотя бы одно значение $t\in[0,\infty)$, при котором

$$DIS\left(Z(t;Z_0)\right)=0, \qquad (9)$$

Σ_U – множество тех начальных значений U_0, для которых существует хотя бы одно значение $t\in[0,\infty)$, при котором

$$DIS\left(U(t;U_0)\right)=0. \qquad (10)$$

Далее определим множества M_Z и M_U следующим образом:

$$M_Z=C_Z^n\setminus\Sigma_Z, \quad M_U=C_U^n\setminus\Sigma_U.$$

Пусть K_{IZ_A} – подмножество пространства C_Z^n, для которого все траектории $Z(t;Z_0)$ стремятся к IZ_A, т.е.

$$\lim_{t\to+\infty} Z(t;Z_0)=IZ_A. \qquad (11)$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. Множество K_{IZ_A} является открытым и связным. Кроме того,

$$M_Z=\bigcup_I K_{IZ_A},$$

при этом отображение

$$F: K_{IZ_A}\to M_U$$

является диффеоморфизмом. Каждое из положений равновесия системы дифференциальных уравнений (6) является устойчивым по Ляпунову.

Докажем предварительно несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть $Z(t)$ – произвольное решение уравнения (6) и I – некоторая перестановка его координат. Тогда $IZ(t)$ – также решение уравнения (6).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $F(Z)=F(IZ)$. Кроме того, так как оператор I линеен, имеем

$$F'(Z)=F'_Z(IZ)=F'(IZ)\cdot I,$$

т.е.

$$F'(IZ)=F'(Z)\cdot I^{-1},$$

следовательно,

$$\left[F'(IZ)\right]^{-1}=I\cdot\left[F'(Z)\right]^{-1}. \qquad (12)$$

Далее из уравнения (6) получаем

$$I\cdot\dot{Z}(t)=-I\cdot\left[F'(Z(t))\right]^{-1}\left[F(Z(t))-A\right]=$$
$$=-\left[F'(IZ(t))\right]^{-1}\left[F(IZ(t))-A\right].$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\left[IZ(t)\right]=-\left[F'(IZ(t))\right]^{-1}\left[F(IZ(t))-A\right],$$

т.е. $IZ(t)$ является решением уравнения (6).

Следствие. *Справедливо равенство*

$$IZ(t;Z_0)=Z(t;IZ_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$IZ(0;Z_0)=IZ_0,$$
$$Z(0;IZ_0)=IZ_0.$$

Решения $IZ(t;Z_0)$ и $Z(t;IZ_0)$ удовлетворяют одному начальному условию, поэтому они совпадают.

Лемма 2. *Если $Z_0\in M_Z$, то решение $Z(t;Z_0)$ определено при $t\in[0,\infty)$ и*

$$\lim_{t\to\infty} Z(t;Z_0)=IZ_A$$

для некоторой перестановки I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если для точки $Z_0=(z_{10},z_{20},\dots,z_{n0})$ выполняется условие

$$\prod_{i<j}\left(z_{i0}-z_{j0}\right)^2\neq 0,$$

то в окрестности этой точки отображение (5) обратимо. Отображение $U=F(Z)$ отображает область M_Z на соответствующую область коэффициентов уравнения (2) – это область M_U. Так как

$$U(t)=A+(U_0-A)e^{-t},$$

то

$$\lim_{t\to+\infty} U(t) = A \qquad (13)$$

при любом начальном значении U_0.

Предположим, что решение $U(t)$ не выходит за пределы области M_U. Тогда ввиду локального диффеоморфизма $F: M_Z \to M_U$ существует локально определенное решение уравнения (6): $Z(t) = F^{-1}\left[U(t)\right]$. Покажем, что это решение неограниченно продолжается.

Пусть решение $Z(t)$ определено на некотором промежутке $t \in [0,T)$ и $T < \infty$. Решение

$$U(t) = A + (U_0 - A)e^{-t}$$

можно записать в виде

$$U(t) = A + \left(U(T) - A\right)e^{T-t}. \qquad (14)$$

Поскольку $DIS\left[U(t)\right] \neq 0$, то уравнение (2) с коэффициентами $U(t)$ имеет *n* различных корней. Этот факт означает, что при некотором $\varepsilon > 0$ на отрезке $[T-\varepsilon, T+\varepsilon]$ существует обратный оператор $F^{-1}\left[U(t)\right]$, т.е. функцию

$$Z(t) = F^{-1}\left[U(t)\right]$$

можно продолжить на отрезок $[T-\varepsilon, T+\varepsilon]$.

Далее из равенства (13) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \lim_{t\to\infty} F^{-1}\left[U(t)\right] = F^{-1}(A) = IZ_A,$$

где IZ_A – некоторая перестановка искомых корней уравнения (1).

Лемма 3. *Множество* M_U *является открытым и связным, а множество* M_Z *– открытым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем открытость множества M_U. Допустим противное. Значит, существует такая точка $U_0 \in M_U$, что ее любая окрестность $B_\varepsilon(U_0)$ пересекается с Σ_U. Поскольку $U_0 \in M_U$, то $DIS\left[U(t;U_0)\right] \neq 0$ при любом $t \in [0,\infty)$, в частности $DIS(U_0) \neq 0$.

Рассмотрим последовательность точек $U_0^{\,i}$ $(i = 1,2,\dots)$, сходящуюся к U_0, для которой $U_0^{\,i} \in \Sigma_U$ (ввиду непрерывности функции $DIS(U)$ можно считать, что $DIS(U_0^{\,i}) \neq 0$). Значит, существует последовательность $t_i \in (0,\infty)$, для которой

$$DIS\left[U\left(t_i;U_0^i\right)\right] = 0. \qquad (15)$$

Выделим из последовательности (t_i) сходящуюся последовательность и обозначим ее опять через (t_i): $t_i \to T$, допуская $T = +\infty$. Покажем, что

$$\lim_{t\to\infty} U\left(t_i;U_0^i\right) = U(T;U_0). \qquad (16)$$

Поскольку

$$U(T;U_0) = A + (U_0 - A)e^{-t},$$

то

$$\begin{aligned} &U\left(t_i;U_0^i\right) - U(T;U_0) = \\ &= A + \left(U_0^i - A\right)e^{-t_i} - \left[A + (U_0 - A)e^{-T}\right] = \\ &= \left(U_0^i - A\right)e^{-t_i} - (U_0 - A)e^{-T} = \\ &= U_0^i e^{-t_i} - U_0 e^{-T} + A\left(e^{-T} - e^{-t_i}\right). \end{aligned}$$

Так как $U_0^{\,i} \to U_0$ и $t_i \to T$, то равенство (16) доказано.

Из равенства (16) ввиду непрерывности функции $DIS(U)$ имеем

$$DIS\left[U(T;U_0)\right] = \lim_{i\to\infty} DIS\left[U\left(t_i;U_0^i\right)\right] = 0,$$

что противоречит исходному предположению о том, что при любом $t \in [0,\infty)$ выполняется неравенство $DIS\left[U(t;U_0)\right] \neq 0$.

Открытость множества M_U доказана.

Множество M_U является связным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U_0^1 \in M_U$, $U_0^2 \in M_U$ – две различные точки. Траектории $U\left(t;U_0^1\right)$ и $U\left(t;U_0^2\right)$ непрерывно связывают их с точкой

$$A = U\left(+\infty;U_0^1\right) = U\left(+\infty;U_0^2\right).$$

Значит, проходя одну траекторию в прямом направлении, а другую – в обратном, перейдем от одной точки к другой.

Докажем теперь открытость множества M_Z. Пусть $Z_0 \in M_Z$ и $U_0 = F(Z_0)$. Локально отображение F является диффеоморфизмом. Пусть N_U – открытое множество, для которого $U_0 \in N_U \subset M_U$ и на котором определен обратный диффеоморфизм F^{-1}; пусть $N_Z = F^{-1}(N_U)$. Тогда, если $Z_0 \in N_Z$, то траектория $Z(t;Z_0)$ не пересекается с множеством Σ_Z. Действительно, если $Z(t;Z_0)$ пересекается с Σ_Z, то $U(t;U_0) = U\left(t;F(Z_0)\right)$ пересекается с Σ_U. Последнее невозможно, так как $F(Z_0) \in N_U \subset M_U$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\varphi:(\alpha,\beta)\to C_Z^n$ *– непрерывное отображение и линия* $Z_0=\varphi(\tau)\quad(\tau\in(\alpha,\beta))$ *не пересекает поверхность* Σ_Z. *Тогда любое начальное условие порождает решение* $Z(t;\varphi(\tau))$, *которое продолжается до* $+\infty$ *по переменной t и функция* $Z(t;\varphi(\tau))$ *непрерывна на всей полосе* $t\in[0,\infty),\ \tau\in(\alpha,\beta)$.

Кроме того, для любого $\tau'\in(\alpha,\beta)$ *существует окрестность* $(\tau'-\varepsilon,\ \tau'+\varepsilon)$ *такая, что для любого* τ *из этой окрестности* $\tau\in(\tau'-\varepsilon,\ \tau'+\varepsilon)$ *траектория* $Z(t;\varphi(\tau))$ *стремится к одной из перестановок корней. Т.е.*

$$\lim_{t\to\infty}Z(t;\varphi(\tau))=IZ_A$$

для некоторой фиксированной перестановки I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование решения $Z(t;\varphi(\tau))$ при $t\in[0,\infty)$ следует из того, что $Z_0=\varphi(\tau)\notin\Sigma_Z$. Покажем непрерывность функции $Z(t;\varphi(\tau))$ в полосе $t\in[0,\infty)$, $\tau\in(\alpha,\beta)$. Предположим, что в точке (t',τ') непрерывность по переменной τ нарушается (по t непрерывность имеется при любом значении $\varphi(\tau)\notin\Sigma_Z$). Рассмотрим решение уравнения (7) с начальным условием $U_0=F[\varphi(\tau)]$:

$$U[t;F(\varphi(\tau))]=F[Z(t;\varphi(\tau))]=$$
$$=A+[F(\varphi(\tau))-A]e^{-t}.$$

Это решение непрерывно по обеим переменным в полосе $t\in[0,\infty),\ \tau\in(\alpha,\beta)$.

Рассмотрим точку $U_1[t';F(\varphi(\tau'))]$. Поскольку $DIS(U_1)\neq0$, то в некоторой окрестности этой точки определен диффеоморфизм F^{-1}. Значит функция

$$Z[t;\varphi(\tau)]=F^{-1}[U(t;F(\varphi(\tau)))]=$$
$$=F^{-1}[A+(F(\varphi(\tau))-A)e^{-t}]$$

непрерывна в точке (t',τ').

Докажем вторую часть леммы. Пусть $\lim\limits_{t\to\infty}Z[t;\varphi(\tau')]=IZ_A$. Возьмем окрестность точки IZ_A, в которой отображение F является диффеоморфизмом и $F^{-1}(A)=IZ_A$. Пусть точка t' такова, что значение $Z[t';\varphi(\tau')]$ лежит в этой окрестности. Ввиду непрерывности функции $Z[t;\varphi(\tau)]$ точки $Z[t';\varphi(\tau)]$ при τ, близких к τ', также лежат в этой окрестности. Рассмотрим начальное условие

$$Z_0(\tau)=Z[t';\varphi(\tau)]$$

вместе с условием

$$U_0(\tau)=F[Z(t';\varphi(\tau))].$$

Очевидно,

$$Z[t;Z(t';\varphi(\tau))]=Z[t+t';\varphi(\tau)].$$

Поэтому

$$\lim_{t\to+\infty}Z[t;\varphi(\tau)]=\lim_{t\to+\infty}Z[t;Z[t';\varphi(\tau')]].$$

Поскольку

$$U[t;U_0(\tau)]=U[t;F(Z(t';\varphi(\tau)))]=$$
$$=A+[F(Z(t';\varphi(\tau)))-A]e^{-t},$$

то

$$\lim_{t\to+\infty}U[t;U_0(\tau)]=A.$$

Лемма 4 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Пусть I_1 и I_2 – две различные перестановки. Тогда если $Z_0^1\in K_{I_1Z_A}$, а $Z_0^2\in K_{I_2Z_A}$, то любая непрерывная линия, соединяющая Z_0^1 и Z_0^2, пересекает поверхность Σ_Z. Действительно, пусть $\varphi:[0,1]\to C_Z^n$ – непрерывное отображение и $\varphi(0)=Z_0^1,\ \varphi(1)=Z_0^2$. По лемме 4 при τ, близких к нулю, имеем

$$\lim_{t\to+\infty}Z[t;\varphi(\tau)]=I_1Z_A.$$

Кроме того,

$$\lim_{t\to+\infty}Z[t;\varphi(1)]=I_2Z_A\neq I_1Z_A.$$

Пусть τ' – нижняя грань тех значений τ, для которых

$$\lim_{t\to+\infty}Z[t;\varphi(\tau)]\neq I_1Z_A.$$

Если $Z[t;\varphi(\tau')]\notin\Sigma_Z$, то существует предел

$$\lim_{t\to+\infty}Z[t;\varphi(\tau')],$$

равный или не равный I_1Z_A. По лемме 4 и равенство, и неравенство должны выполняться на некотором интервале $(\tau'-\varepsilon,\ \tau'+\varepsilon)$, что невозможно по определению τ'.

Значит $Z[t;\varphi(\tau')]\in\Sigma_Z$.

Утверждение $Z_0\in K_{Z_A}$ тогда и только тогда, когда $IZ_0\in K_{IZ_A}$ следует из леммы 1.

Докажем открытость множества K_{IZ_A}. Пусть $Z_0\in K_{IZ_A}$, т.е. $Z_0\in M_Z$. Ввиду открытости множества M_Z точка Z_0 входит в него с некоторой выпуклой окрестностью. Пусть Z_0' – произвольная точка этой окрестности. Поскольку $Z_0' \in M_Z$, то $Z_0' \in K_{I'Z_A}$ для некоторого I'. Если $I' \neq I$, то, по доказанному, отрезок

$$\varphi(\tau) = Z_0(1-\tau) + Z_0'\tau \qquad (\tau \in [0,1])$$

пересекает множество Σ_Z, значит не лежит полностью в M_Z, что противоречит ее построению. Значит, $I' = I$ и $Z_0' \in K_{IZ_A}$.

Таким образом, множество K_{IZ_A} является открытым.

Доказательство связности множества K_{IZ_A} получается дословным повторением доказательства связности множества M_U.

Теорема 1 доказана.

Из открытости множества K_{IZ_A} следует устойчивость по Ляпунову положения равновесия IZ_A.

Из проведенных рассуждений очевидным образом вытекает равенство

$$M_Z = \bigcup_I K_{IZ_A}. \qquad (17)$$

Покажем, что отображение $F: K_{IZ_A} \to M_U$ является диффеоморфизмом. Если $U_0 \in M_U$, то ему соответствует $Z_0 \in K_{Z_A}$ и $IZ_0 \in K_{IZ_A}$. Поэтому отображение $F: K_{IZ_A} \to M_U$ является взаимно однозначным. Кроме того, отображение F на K_{IZ_A} имеет обратимую производную.

Проведем анализ областей притяжения, т.е. построим в явном виде разбиение (17) множества M_Z для случая квадратного уравнения

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0. \qquad (18)$$

Равенство

$$U(t) = A + (U_0 - A)e^{-t}$$

для уравнения (18) приводит к следующей системе:

$$\begin{cases} z_1(t) + z_2(t) + a_1 = e^{-t}\left[z_1(0) + z_2(0) + a_1\right], \\ z_1(t)\cdot z_2(t) - a_2 = e^{-t}\left[z_1(0)\cdot z_2(0) - a_2\right]. \end{cases} \qquad (19)$$

Система (19) означает, что функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ являются решениями уравнения

$$\begin{gathered} z^2 + \left\{a_1 - e^{-t}\left[z_1(0) + z_2(0) + a_1\right]\right\}z + \\ + a_2 + e^{-t}\left[z_1(0)\cdot z_2(0) - a_2\right] = 0. \end{gathered} \qquad (20)$$

Найдем дискриминант D этого уравнения:

$$\begin{gathered} D = \left\{a_1 - e^{-t}\left[z_1(0) + z_2(0) + a_1\right]\right\}^2 - \\ -4\left\{a_2 + e^{-t}\left[z_1(0)\cdot z_2(0) - a_2\right]\right\} = \\ = a_1^2 - 2a_1\left[z_1(0) + z_2(0) + a_1\right]e^{-t} + \\ + e^{-2t}\left[z_1(0) + z_2(0) + a_1\right]^2 - \\ -4a_2 - 4\left[z_1(0)\cdot z_2(0) - a_2\right]e^{-t} = \\ = \left[z_1(0) + z_2(0) + a_1\right]^2 e^{-2t} - \\ -\left\{2a_1^2 + 2a_1\left[z_1(0) + z_2(0)\right] + \right. \\ \left. +4\left[z_1(0)\cdot z_2(0) - a_2\right]\right\}e^{-t} + a_1^2 - 4a_2. \end{gathered}$$

Обозначив для сокращения записи $z_1(0) = z_{10}$ и $z_2(0) = z_{20}$, получаем, что разрешимость уравнения

$$\begin{gathered} \left(z_{10} + z_{20} + a_1\right)^2 e^{-2t} - \\ -\left[2a_1^2 + 2a_1\left(z_{10} + z_{20}\right) + 4\left(z_{10}z_{20} - a_2\right)\right]e^{-t} + \\ + a_1^2 - 4a_2 = 0 \end{gathered} \qquad (21)$$

при некотором $t \in (0, \infty)$ означает, что при таких начальных значениях функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ на весь полуинтервал $[0, \infty)$ непродолжимы.

Так как уравнение (21) по отношению к переменной e^{-t} является квадратным, то

$$e^{-t} = \frac{2a_1\left(z_{10} + z_{20} + a_1\right) + 4\left(z_{10}z_{20} - a_2\right) \pm \sqrt{\Delta}}{2\left(z_{10} + z_{20} + a_1\right)^2}, \qquad (22)$$

где

$$\begin{gathered} \Delta = \left[2a_1^2 + 2a_1\left(z_{10} + z_{20}\right) + 4\left(z_{10}z_{20} - a_2\right)\right]^2 - \\ -4\left(a_1^2 - 4a_2\right)\left(z_{10} + z_{20} + a_1\right)^2 = \\ = 16\left(z_{10}^2 + a_1 z_{10} + a_2\right)\left(z_{20}^2 + a_1 z_{20} + a_2\right). \end{gathered}$$

Обозначим для сокращения записи

$$\Delta_1 = \left(z_{10}^2 + a_1 z_{10} + a_2\right)\left(z_{20}^2 + a_1 z_{20} + a_2\right).$$

Тогда $\Delta = 16\Delta_1$. Подставляя найденное значение Δ в выражение (22), получаем:

$$e^{-t} = \frac{a_1\left(z_{10} + z_{20} + a_1\right) + 2\left(z_{10}z_{20} - a_2\right) \pm 2\sqrt{\Delta_1}}{\left(z_{10} + z_{20} + a_1\right)^2}. \qquad (23)$$

Таким образом, при выполнении хотя бы одного из неравенств

$$0 < \frac{a_1\left(z_{10} + z_{20} + a_1\right) + 2\left(z_{10}z_{20} - a_2\right) + 2\sqrt{\Delta_1}}{\left(z_{10} + z_{20} + a_1\right)^2} < 1,$$

$$0 < \frac{a_1\left(z_{10} + z_{20} + a_1\right) + 2\left(z_{10}z_{20} - a_2\right) - 2\sqrt{\Delta_1}}{\left(z_{10} + z_{20} + a_1\right)^2} < 1$$

функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ с такими начальными значениями на полуинтервал $[0,\infty)$ непродолжимы.

Заметим, что равенство (23) определяет множество Σ_Z. Например, если $z_{10}=z_{20}$, то такие точки принадлежат поверхности Σ_Z. Действительно, пусть $z_{10}=z_{20}=z$, тогда

$$\frac{a_1(2z+a_1)+2(z^2-a_2)+2(z^2+a_1z+a_2)}{(2z+a_1)^2}=$$

$$=\frac{4z^2+4a_1z+a_1^2}{(2z+a_1)^2}=1,$$

т.е. уравнение (23) разрешимо при $t=0$.

Поверхность (23) содержит и другие точки. Рассмотрим уравнение

$$z^2+z+1=0,$$

пусть $z_{10}=1,\ z_{20}=0$, тогда уравнение (23) примет вид

$$e^{-t}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

т.е.

$$t=\ln 2-\ln\sqrt{3},$$

значит, уравнение (23) имеет решение $t\in[0,\infty)$.

Полученный в теореме 1 результат можно обобщить. Пусть

$$\frac{dz}{dt}=-\left[F'(z)\right]^{-1}\cdot F(z), \qquad (24)$$

где F – дифференцируемый по Фреше нелинейный оператор, действующий из некоторого множества M банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2.

Теорема 2. *Пусть* $F(z_*)=0$ *и линейный оператор* $F'(z_*)$ *имеет ограниченный обратный, кроме того,*

$$\lim_{\|z-z_*\|\to 0}\left\|F'(z)-F'(z_*)\right\|=0, \qquad (25)$$

тогда производная Фреше отображения

$$-\left[F'(z)\right]^{-1}\cdot F(z)$$

в точке $z=z_*$ *равна* $-E$, *где* E *– единичный оператор.*

Доказательство теоремы 2. Отметим, что линейные операторы $F'(z)$ в близких к z_* точках z также имеют ограниченные обратные $\left[F'(z)\right]^{-1}$ и

$$\lim_{\|z-z_*\|\to 0}\left\|\left[F'(z)\right]^{-1}-\left[F'(z_*)\right]^{-1}\right\|=0. \qquad (26)$$

Пусть

$$A(z)=z-\left[F'(z)\right]^{-1}F(z). \qquad (27)$$

Рассмотрим следующее тождество:

$$A(z)-A(z_*)=$$

$$=\left[F'(z)\right]^{-1}\left[F'(z_*)(z-z_*)-F(z)+F(z_*)\right]+$$

$$+\left[F'(z)\right]^{-1}\left[F'(z)-F'(z_*)\right](z-z_*). \qquad (28)$$

Действительно, после раскрытия скобок в правой части равенства (28), получаем

$$\left[F'(z)\right]^{-1}\left[F'(z_*)\right](z-z_*)-$$

$$-\left[F'(z)\right]^{-1}\left[F(z)-F(z_*)\right]+$$

$$+\left[F'(z)\right]^{-1}\left[F'(z)-F'(z_*)\right](z-z_*)=$$

$$=-\left[F'(z)\right]^{-1}\left[F(z)-F(z_*)\right]+$$

$$+\left[F'(z)\right]^{-1}F'(z)(z-z_*)=$$

$$=z-z_*-\left[F'(z)\right]^{-1}F(z)+\left[F'(z)\right]^{-1}F(z_*)=$$

$$=z-\left[F'(z)\right]^{-1}F(z)-\left\{z_*-\left[F'(z_*)\right]^{-1}F(z_*)\right\}.$$

Далее из тождества (28) вытекает, что

$$\frac{\left\|A(z)-A(z_*)\right\|}{\|z-z_*\|}\le$$

$$\le\left\|F'(z)\right\|^{-1}\left[\frac{\left\|F(z)-F(z_*)-F'(z_*)(z-z_*)\right\|}{\|z-z_*\|}+\right.$$

$$\left.+\left\|F'(z)-F'(z_*)\right\|\right].$$

Поэтому

$$\lim_{\|z-z_*\|\to 0}\frac{\left\|A(z)-A(z_*)\right\|}{\|z-z_*\|}=0,$$

т.е.

$$A'(z_*)=0. \qquad (29)$$

Таким образом,

$$0=A'(z_*)=E-\left\{\left[F'(z)\right]^{-1}F(z)\right\}'_{z=z_*},$$

т.е.

$$-\left\{\left[F'(z)\right]^{-1}F(z)\right\}'_{z=z_*}=-E. \qquad (30)$$

Теорема 2 доказана.

Данная теорема влечет асимптотическую устойчивость по Ляпунову состояния равновесия z_* операторного дифференциального уравнения (24).

Отметим, что доказательство теоремы 2 по существу повторяет рассуждения, приведенные в [2, с. 137].

Равенство (30) является очевидным в случае дифференциального аналога метода Ньютона

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Действительно,

$$-\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]'_x = -\frac{\left[f'(x)\right]^2 - f(x) f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} =$$

$$= -1 + \left.\frac{f(x) f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}\right|_{x=x_*} = -1,$$

где x_* – корень уравнения $f(x) = 0$.

В табл. приведены некоторые из многочисленных результатов вычислений значений решений $z_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ уравнения (6), полученных с использованием пакета символьной математики *Maple*, с применением дифференциального аналога итерационного метода Вейерштрасса

$$\frac{dz_j}{dt} = -\frac{P_n\left[z_j(t)\right]}{\omega'\left[z_j(t)\right]}.$$

Значение параметра *t* варьировалось в широких пределах для изучения скорости сходимости итерационного процесса.

Таблица

Результаты вычислений приближенных значений корней уравнений, полученные с использованием *Maple*

Начальные значения	Корни уравнения
	1. $(z-i)(z-1)(z-3)=0$
$z_1(0)=2\cdot i;$ $z_2(0)=6;$ $z_3(0)=0.$	$z_1(100)=1.72126\cdot10^{-8}+1.00000\cdot i;$ $z_2(100)=3.00000-2.90487\cdot10^{-8}i;$ $z_3(100)=1.00000+2.68979\cdot10^{-8}i.$
$z_1(0)=2;$ $z_2(0)=6\cdot i;$ $z_3(0)=-19.$	$z_1(100)=3.00000+2.37177\cdot10^{-8}i;$ $z_2(100)=1.00000+3.59373\cdot10^{-8}i;$ $z_3(100)=4.38430\cdot10^{-8}+1.00000\cdot i.$
$z_1(0)=0;$ $z_2(0)=1;$ $z_3(0)=3.$	$z_1(100)=1.70201\cdot10^{-24}+0.99999\cdot i;$ $z_2(100)=1.00000+0\cdot i;$ $z_3(100)=3.00000+0\cdot i.$
	2. $(z^2+z+1)(z-1)^2=0$
$z_1(0)=i;$ $z_2(0)=1;$ $z_3(0)=5;$ $z_4(0)=9.$	$z_1(889)=-0.50000+0.86602\cdot i;$ $z_2(889)=1.00000+0\cdot i;$ $z_3(889)=1.00000+4.81809\cdot10^{-8}\cdot i;$ $z_4(889)=-0.50000-0.86602\cdot i.$
$z_1(0)=i;$ $z_2(0)=2\cdot i;$ $z_3(0)=10\cdot i;$ $z_4(0)=123\cdot i.$	$z_1(40)=-0.50000+0.86602\cdot i;$ $z_2(40)=1.00000+3.18191\cdot10^{-8}\cdot i;$ $z_3(40)=-0.50000-0.86602\cdot i;$ $z_4(40)=1.00000-3.18193\cdot10^{-8}\cdot i.$
	3. $(z-1)^2(z-1-28\cdot i)^2=0$
$z_1(0)=0;$ $z_2(0)=1;$ $z_3(0)=5;$ $z_4(0)=9.$	$z_1(89)=-1.20775\cdot10^{-11}+1.00000\cdot i;$ $z_2(89)=1.00000+28.00000\cdot i;$ $z_3(89)=-1.40211\cdot10^{-9}+1.00000\cdot i;$ $z_4(89)=1.00000+28.00000\cdot i.$
$z_1(0)=0;$ $z_2(0)=1;$ $z_3(0)=1.1;$ $z_4(0)=1.2.$	$z_1(89)=-2.20676\cdot10^{-11}+1.00000\cdot i;$ $z_2(89)=1.00000+28.00000\cdot i;$ $z_3(89)=1.76701\cdot10^{-10}+1.00000\cdot i;$ $z_4(89)=1.00000+28.00000\cdot i.$
	4. $(z-i)^2(z+i)^2=0$
$z_1(0)=i;$ $z_2(0)=1;$ $z_3(0)=5;$ $z_4(0)=9.$	$z_1(29)=0.+1.00000\cdot i;$ $z_2(29)=6.96291\cdot10^{-7}-0.99999\cdot i;$ $z_3(29)=-7.87554\cdot10^{-11}+1.00000\cdot i;$ $z_4(29)=-6.96055\cdot10^{-7}-1.00000\cdot i.$
$z_1(0)=0;$ $z_2(0)=1;$ $z_3(0)=1.1;$ $z_4(0)=1.2.$	$z_1(0.00007)=0.0000530399+0\cdot i;$ $z_2(0.00007)=0.988296+0\cdot i;$ $z_3(0.00007)=1.13779+0\cdot i;$ $z_4(0.00007)=1.17363+0\cdot i.$
$z_1(0)=i;$ $z_2(0)=1;$ $z_3(0)=1.1;$ $z_4(0)=-200.$	$z_1(50)=0.+1.00000\cdot i;$ $z_2(50)=3.82841\cdot10^{-10}+1.00000\cdot i;$ $z_3(50)=2.42952\cdot10^{-8}-1.00000\cdot i;$ $z_4(50)=-3.83907\cdot10^{-8}-1.00000\cdot i.$

На примере вычисления корней трех первых уравнений хорошо прослеживается сходимость вычислительного процесса к одной из перестановок корней IZ_A при различных начальных значениях Z_0. Для четвертого уравнения в первом случае наблюдается быстрая сходимость процесса к корням уравнения. Однако, во втором случае при таких начальных значениях Z_0 вычислительный процесс был остановлен программой. Это свидетельствует о том, что данные начальные условия являются «плохими», т.е. решения уравнения (6) при таких начальных значениях непродолжимы для любых $t \in [0, \infty)$. В третьем случае, при небольшом изменении начальных значений, опять наблюдается хорошая сходимость к корням решаемого алгебраического уравнения.

Заметим также, что в известных авторам источниках [2–7], ставших к настоящему времени классическими в области итерационных методов и теории динамических систем, переход к дифференциальным аналогам итерационных процессов не рассматривался.

Заключение. Таким образом, в статье построен дифференциальный аналог итерационного процесса Вейерштрасса одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения. Доказано, что подмножество пространства начальных условий, для которого все траектории стремятся к одной из перестановок корней, является открытым и связным, при этом отображение данного подмножества на множество значений коэффициентов уравнения является диффеоморфизмом. Доказана асимптотическая устойчивость по Ляпунову состояний равновесия; исследованы вопросы продолжимости решений. Полученные результаты обобщены для построения дифференциального аналога итерационного процесса Ньютона–Канторовича в общем случае. Приведенные численные примеры показывают высокую эффективность этого процесса: задача Коши, решаемая для соответствующей системы дифференциальных уравнений, имеет траекторию, быстро приближающуюся к вектору корней алгебраического уравнения при «почти любых» начальных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трубников, Ю.В. Оптимальные итерационные процессы: монография / Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко, И.А. Орехова. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2011. – 95 с.
2. Красносельский, М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
3. Ортега, Дж. Итерационные методы решения нелинейных уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболт. – М.: Мир, 1975. – 560 с.
4. Коллатц, Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. – М.: Мир, 1969. – 448 с.
5. Трауб, Дж. Итерационные методы решения уравнений / Дж. Трауб. – М.: Мир, 1985. – 264 с.
6. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
7. Каток, А.Б. Введение в современную теорию динамических систем / А.Б. Каток, Б. Хасселблат. – М.: Факториал, 1999. – 786 с.

Поступила в редакцию 31.01.2013. Принята в печать 24.04.2013.
Адрес для корреспонденции: e-mail: Yurii_Trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.