мену. Непосредственно даны теоретические вопросы и тематика практических заданий по всем видам текущего и итогового контроля. В состав этого блока входят также тестирующие электронные программы по каждой теме как по разделам, так и в целом по дисциплине. Она представляет универсальную программную оболочку, наполнение которой возлагается на преподавателя. Контролирующая система позволяет накапливать и анализировать результаты тестирования.

Данная программная продукция уже востребована, проходит апробацию в учебном процессе через локальную сеть академии и путем передачи на локальные носители информации.

Есть определенные трудности с материально-техническим обеспечением. Однако хочется надеяться, что курсант, в перспективе, вместе с личным оружием при поступлении будет получать личный ноутбук. Это расширит возможности использования УМК в учебно-воспитательном процессе, повысит качество подготовки специалистов для Вооруженных Сил Республики Беларусь.

Yu. A. GRIBKOV

MECHANICS CHAIR EXPERIENCE IN THE CREATION OF ENGINEERING MECHANICS EDUCATIONAL COURSE

The article covers the experience of the Department of Mechanics, Military Academy in the development of a new generation of educational and methodological support and its implementation in the educational process. The structure of engineering mechanics.

Получено 23.03.2009

ISBN 978-985-468-707-0. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 4. Гомель, 2010

УДК 531.8

А. В. ЛОКТИОНОВ, С. А. СЕНЬКОВ
Витебский государственный технологический университет, Беларусь

К ВОПРОСУ О СОСТАВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Рассмотрено сложное движение эллиптического маятника. Составлены и решены дифференциальные уравнения, описывающие движения ползуна и шарика. В работе принято, что в начальный момент угол отклонения стрелы маятника от вертикали и скорость ползуна равны нулю, угловая скорость вращения стрелы не равна нулю. С учетом принятых начальных условий получены уравнения движения ползуна и малых колебаний маятника.

В книге [1] получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний эллиптического маятника, состоящего из ползуна, шарика и стержня, который движется в поле сил тяжести. При этом используется координатный способ задания движения ползуна и шарика. Вертикальная ось проведена через начальное положение центра тяжести системы, который движется ввиду отсутствия горизонтальных внешних сил по вертикали. Принято, что в начальный момент ползун находится в покое, угловая скорость вращения стержня $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$, угол отклонения $\varphi_0 = \varphi_0 \neq 0$, что соответствует отсутствию движения центра масс системы.

В представленной работе поставлена задача по определению параметров движения системы для случая, при котором центр масс системы перемещается.

Рассмотрим эллиптический маятник, который состоит из ползуна I, перемещающегося без трения по горизонтальной прямой, и шарика II, подвешенного к ползуну I невесомым нерастяжимым стержнем (рисунок 1). Масса ползуна I равна M, масса шарика – m, длина стержня – l.

По расчетной схеме (см. рисунок 1) принимаем, что в начальный момент угол $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$, а угловая скорость $\varphi_0 = \varphi_0 \neq 0$. Найдем закон движения ползуна и шарика в зависимости от заданных начальных условий, при которых $\dot{\varphi}_0 = \omega_0 \neq 0$.

Для решения воспользуемся уравнениями Лагранжа. Принимаем, что маятник перемещается в горизонтальной плоскости, и потенциальная энергия системы равна нулю. Система обладает двумя степенями свободы, а значит двумя обобщенными координатами x и φ.

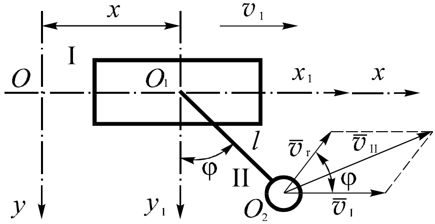

Рисунок 1 – Расчетная схема движения эллиптического маятника

Скорость шарика в абсолютном движении определяется по формуле $\overline{v}_{II} = \overline{v}_I + \overline{v}_r$ (см. рисунок 1), где $\overline{v}_I$ – скорость начала O_1 подвижных осей, $\overline{v}_r$ – скорость шарика относительно поступательно перемещающихся осей $x_1O_1y_1$ [2]. Следовательно,

$$v_{\mathrm{II}} = v_{\mathrm{I}}^2 + 2v_{\mathrm{I}}v_r + v_{\mathrm{I}}^2 .$$

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2). \qquad (1)$$

Подставляя в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = 0\ ,$$

получим

$$\frac{d}{dt}(M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi) = 0\ .$$

Интегрируя его, будем иметь:

$$(M+m)\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi = C_1\ . \tag{2}$$

С учетом принятых начальных условий при $t = t_0 = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$ из уравнения (2) получим $C_1 = ml\dot{\varphi}_0$.

Тогда зависимость скорости ползуна от угловой скорости вращения и угла отклонения стержня от вертикали оси определяется выражением

$$\dot{x} = \frac{ml(\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}\cos\varphi)}{M+m}\ . \tag{3}$$

Интегрируя (2), найдем:

$$(M+m)x + ml\sin\varphi = ml\dot{\varphi}_0 t + C_2\ .$$

С учетом принятых начальных условий получим $C_2 = 0$.

Следовательно, закон движения ползуна

$$x = \frac{ml(\varphi_0 t - \sin\varphi)}{M+m}\ . \tag{4}$$

Подставляя (1) в уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0\text{, получим:}$$

$$\frac{d}{dt}\left[ml(\dot{x}\cos\varphi + l\dot{\varphi})\right] + ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi = 0\ . \tag{5}$$

Подставив в (5) выражение (3), имеем:

$$\frac{d}{dt}\left[B\dot{\varphi}_0\cos\varphi - B\dot{\varphi}\cos^2\varphi + ml^2\dot{\varphi}\right] + B\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}\sin\varphi - B\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi = 0\ ,$$

где $B = \dfrac{m^2 l^2}{M+m}$.

После преобразований получим дифференциальное уравнение маятника в виде:

$$-B\ddot{\varphi}\cos^2\varphi + B\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + ml^2\ddot{\varphi} = 0\ . \tag{6}$$

Для решения дифференциального уравнения (6) понизим порядок уравнения путем замены:

$$\dot{\varphi} = p\ , \quad \ddot{\varphi} = \frac{dp}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = p\frac{dp}{d\varphi}\ .$$

Тогда уравнение (6) после деления на p примет вид:

$$\frac{dp}{d\varphi}(ml^2 - B\cos^2\varphi) + \frac{B}{2}p\sin 2\varphi = 0\ .$$

Решая полученное уравнение методом разделения переменных, будем иметь:

$$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{B}{2}\frac{\sin 2\varphi}{B\cos^2\varphi - ml^2}d\varphi\ .$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln\left|B\cos^2\varphi - ml^2\right| + \ln C_3\ .$$

Отсюда следует, что

$$\dot{\varphi} = p = \frac{C_3}{\sqrt{B\cos^2\varphi - ml^2}}\ .$$

Поскольку при $t = t_0 = 0: \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0,\ \varphi = \varphi_0 = 0$, то получим

$$C_2 = \dot{\varphi}_0\sqrt{B - ml^2}\ .$$

Тогда

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0\sqrt{B - ml^2}}{\sqrt{B\cos^2\varphi - ml^2}} = \dot{\varphi}_0\sqrt{\frac{\dfrac{(ml^2)}{M+m} - ml^2}{\dfrac{(ml^2)}{M+m} - \dfrac{(ml^2)}{M+m}\sin^2\varphi - ml^2}} = \dot{\varphi}_0\sqrt{\frac{mM}{m^2\sin^2\varphi + mM}}\ .$$

Окончательно зависимость угловой скорости вращения маятника от угла отклонения стержня от вертикальной оси приобретает вид

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\sqrt{1 + \dfrac{m}{M}\sin^2\varphi}}\ .$$

Найдем закон движения эллиптического маятника, считая угол φ малым. Так как для малых углов $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$, и $\sin^2\varphi < \sin\varphi$, принимаем $\sin^2\varphi \approx \varphi$ [1]. Отсюда

$$\sqrt{1 + \frac{m}{M}\varphi}\,d\varphi = \dot{\varphi}_0 dt\ . \qquad (7)$$

---

[1] Указанная гипотеза вызывает сомнение с точки зрения ее допустимости. Однако считаем возможным ее оставить с целью обсуждения (прим. ред).

Воспользовавшись заменой $\sqrt{1+\frac{m}{M}\varphi = p}$, получим

$$\varphi = \frac{M}{m}(p^2 - 1)\text{, а } d\varphi = d\frac{M}{m}(p^2 - 1) = 2\frac{M}{m}pdp .$$

Тогда уравнение (7) примет вид:

$$2\frac{M}{m}p^2 dp = \dot{\varphi}_0 dt .$$

Интегрируя, с учетом принятых начальных условий (при $t = t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$), получим:

$$\varphi = \frac{M}{m}\left[\sqrt[2]{\left(\frac{3m}{2M}\dot{\varphi}_0 t + 1\right)^2} - 1\right]. \tag{8}$$

Выведенное уравнение выражает закон движения малых перемещений эллиптического маятника.

Подстановка уравнения (8) в (5) позволяет получить закон движения ползуна в зависимости от времени и заданной начальной угловой скорости вращения маятника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики: в 2 т. / А. А. Яблонский. – М.: Высш. шк., 1971. – Т. 2: Динамика. – 488 с.

2 **Бутенин, В. Н.** Курс теоретической механики: в 2 т. / В. Н. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М.: Наука, 1971. – Т. 2: Динамика. – 464 с.

A. V. LOKTIONOV, S. A. SENKOV

TO THE QUESTION OF SETTING UP THE DIFFERENTIAL ELLIPTIC PENDULUM RELATIVE MOTION EQUATION

Relative motion of an elliptic pendulum has been considered. The differential equations describing movements of the slider and the ball have been set up and solved. In the work it is assumed that at the start time the pendulum arrow deflection angle and the speed of a slider are equal to zero, the arrow angular velocity is nonzero. With the given initial conditions the equations of motion of the slider and small oscillations of the pendulum have been received.

Получено 26.01.2010