МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

Высшая математика.
Функции нескольких переменных. Комплексные числа.
Дифференциальные уравнения. Ряды

Практикум для студентов первого курса специальностей
1-50 01 01 «Производство текстильных материалов»,
1-50 02 01 «Производство одежды, обуви и кожгалантерейных изделий»,
1-54 01 01-04 «Метрология, стандартизация и сертификация
(легкая промышленность)»

Витебск
2022

УДК 517

Составители:

Т. В. Никонова, О. Е. Рубаник

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ», протокол № 10 от 29.06.2022.

Высшая математика. Функции нескольких переменных. Комплексные числа. Дифференциальные уравнения. Ряды: практикум / сост. Т. В. Никонова, О. Е. Рубаник. – Витебск : УО «ВГТУ», 2022. – 73 с.

Издание содержит методические материалы по темам «Функции нескольких переменных», «Комплексные числа», «Дифференциальные уравнения» и «Ряды» дисциплины «Высшая математика» и предназначено для студентов первого курса специальностей 1-50 01 01 «Производство текстильных материалов», 1-50 02 01 «Производство одежды, обуви и кожгалантерейных изделий», 1-54 01 01-04 «Метрология, стандартизация и сертификация (легкая промышленность)». В каждом разделе практикума приведены краткие теоретические сведения, подробно разобранные практические примеры, приведены задания для решения на практических занятиях и задачи для самостоятельного решения. Практикум предназначен для эффективной подготовки студентов к практическим занятиям, к промежуточному контролю знаний и экзамену.

УДК 517

Содержание

1 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1 Понятие функции нескольких переменных. Частные производные

Пусть даны два непустых множества $D \subset \boldsymbol{R}^n$ и $U \subset \boldsymbol{R}$. Правило f, которое каждой точке $M(x_1; x_2; ..; x_n) \in D$ ставит в соответствие один и только один элемент $u \in U$, называется ***функцией от n переменных*** и записывается в виде $u = f(x_1; x_2; ..; x_n)$. При этом переменные $x_1; x_2; ..; x_n$ называют ***независимыми переменными***, а множество $D=D(f)$ – ***областью определения функции***.

Функции двух переменных принято записывать в виде $z=f(x;y)$, а функции трех переменных – в виде $u=f(x;y;z)$. Областью определения функции двух переменных является некоторое множество точек плоскости, а областью определения функции трех переменных – некоторое множество точек трехмерного пространства.

Линию, ограничивающую область, называют ***границей области***. Точки области, не лежащие на границе, называют ***внутренними***. Область, состоящая только из одних внутренних точек, называется ***открытой***. Область с присоединенной к ней границей называется ***замкнутой***. Область называется ***ограниченной***, если все ее точки принадлежат некоторому кругу конечного радиуса R. В противном случае область называется ***неограниченной***.

Пример 1. Найти область определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

Решение. Данная функция определена при условии, что $4 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 4$. Для нахождения на плоскости Oxy множества точек, удовлетворяющих этому неравенству, построим сначала границу области. Для этого в последнем неравенстве поменяем знак «<» на знак «=». Получим: $x^2 + y^2 = 4$ или $x^2 + y^2 = 2^2$ – уравнение окружности с центром в точке (0;0) и радиуса R=2. Очевидно, что неравенству удовлетворяют все точки, лежащие внутри данной окружности (рис. 1.1).

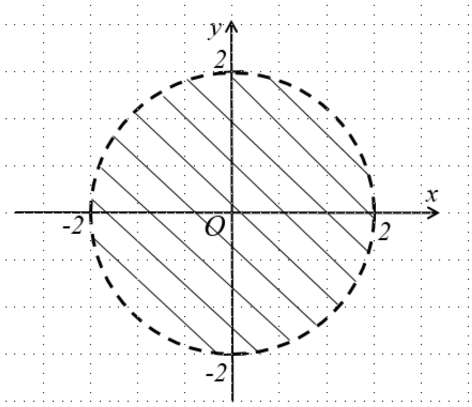

Рисунок 1.1 – Область определения функции

Пусть функция двух переменных $z=f(x;y)$ (для большего количества переменных все рассуждения аналогичны) определена в некоторой окрестности V точки $M(x;y)$. Поскольку x и y – независимые переменные, то каждая из них может изменяться или сохранять свое значение независимо от другой.

Зафиксируем значение y, а переменной x придадим приращение Δx (Δx выберем так, чтобы точка $(x+\Delta x;y)$ тоже принадлежала окрестности V), тогда z получит приращение, которое называют ***частным приращением** z **по** x **в точке*** $M(x;y)$ и обозначается $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично, фиксируя аргумент x и придавая аргументу y приращение Δy так, чтобы точка $(x;y+\Delta y)$ тоже принадлежала окрестности V, получим ***частное приращение** z **по** y **в точке*** $M(x;y)$:

$$\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x; y).$$

Если же одновременно придать независимым переменным x и y приращение Δx и Δy соответственно, так, чтобы точка $(x+\Delta x;y+\Delta y)$ тоже принадлежала окрестности V, тогда z получит приращение, которое называют ***полным приращением** z **в точке*** $M(x;y)$ и обозначается Δz:

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y).$$

Функция $z=f(x;y)$ называется ***непрерывной в точке*** $M(x;y)$, если выполняется равенство

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Функция ***непрерывна в области*** D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то он называется ***частной производной функции** z **по переменной*** x и обозначается z'_x, f'_x или $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Аналогично, если существует предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то он называется ***частной производной** z **по переменной*** y и обозначается z'_y, f'_y или $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной переменной при условии постоянства значений остальных переменных. Поэтому частные производные функции нескольких переменных находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом остальные переменные считаются постоянными величинами). Например, справедливы следующие равенства:

$$x'_x = 1,\ \ x'_y = 0,\ \ y'_y = 1,\ \ y'_x = 0,\ \ (g(y))'_x = 0,\ \ (g(x))'_y = 0.$$

Заметим, что одна из переменных считается постоянной только в процессе дифференцирования. После того, как выражение z'_x или z'_y найдено, x и y могут принимать любые значения. А это означает, что z'_x и z'_y являются функциями обеих переменных. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются ***частными производными второго порядка***. Они обозначаются и определяются следующим образом:

$$z''_{xx}=(z'_x)'_x \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yy}=(z'_y)'_y \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$z''_{xy}=(z'_x)'_y \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yx}=(z'_y)'_x \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т. д. порядков. Частная производная 2-го или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется ***смешанной частной производной***. Таковыми являются, например, $z''_{xy}, z''_{yx}, z'''_{xyx}, z'''_{x^2y}$.

Теорема 1.1 (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция *z=f(x;y)* имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке *M(x;y)*, то она дифференцируема в этой точке, и выражение

$$dz=z'_x\cdot dx+z'_y\cdot dy \tag{1.1}$$

называется ***полным дифференциалом*** или ***дифференциалом первого порядка.***

Теорема 1.2. Если функция *z=f(x;y)* и ее частные производные $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ определены и непрерывны в точке *M(x;y)* и в ее окрестности, то в этой точке $z''_{xy}=z''_{yx}$.

То есть если смешанные производные непрерывны, то они равны, и результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Пример 2. Найти частные производные первого и второго порядков функции $z=2x^2y^3+5\cos y-4\sqrt{x}+7$.

Решение. В процессе нахождения частных производных будем применять следующие правила дифференцирования функции одной переменной:

$$(u\pm v)'=u'\pm v',\quad (Cu)'=Cu',\quad C'=0\text{, где } C \text{ – константа.}$$

Получим:

$$z'_x=(2x^2y^3+5\cos y-4\sqrt{x}+7)'_x=\left[y-const\right]=(2x^2y^3)'_x+(5\cos y)'_x-$$

$$-(4\sqrt{x})'_x + 7'_x = 2y^3(x^2)'_x + 0 - 4(\sqrt{x})'_x + 0 = 2y^3 \cdot 2x - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 4xy^3 - \frac{2}{\sqrt{x}},$$

$$z'_y = (2x^2y^3 + 5\cos y - 4\sqrt{x} + 7)'_y = [x - const] = (2x^2y^3)'_y + (5\cos y)'_y - (4\sqrt{x})'_y +$$
$$+ 7'_y = 2x^2(y^3)'_y + 5(\cos y)'_y - 0 + 0 = 2x^2 \cdot 3y^2 - 5\sin y = 6x^2y^2 - 5\sin y,$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(4xy^3 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)'_x = [y - const] = (4xy^3)'_x - \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'_x = 4y^3(x)'_x -$$
$$-2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'_x = 4y^3 \cdot 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = 4y^3 + \frac{1}{\sqrt{x^3}},$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(4xy^3 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)'_y = [x - const] = (4xy^3)'_y - \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'_y = 4x(y^3)'_y - 0 =$$
$$= 4x \cdot 3y^2 = 12xy^2,$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 - 5\sin y)'_y = [x - const] = (6x^2y^2)'_y - (5\sin y)'_y =$$
$$= 6x^2(y^2)'_y - 5(\sin y)'_y = 6x^2 \cdot 2y - 5\cos y = 12x^2y - 5\cos y,$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 - 5\sin y)'_x = [y - const] = (6x^2y^2)'_x - (5\sin y)'_x =$$
$$= 6y^2(x^2)'_x - 0 = 6y^2 \cdot 2x = 12xy^2.$$

Пример 3. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(7x - tgy)$.

Решение. Воспользуемся формулой (1.1): $dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$.

$$z'_x = (\ln(7x - tgy))'_x = [y - const] = \frac{1}{7x - tgy} \cdot (7x - tgy)'_x =$$
$$= \frac{1}{7x - tgy} \cdot ((7x)'_x - (tgy)'_x) = \frac{1}{7x - tgy} \cdot (7 - 0) = \frac{7}{7x - tgy},$$

$$z'_y = (\ln(7x - tgy))'_y = [x - const] = \frac{1}{7x - tgy} \cdot (7x - tgy)'_y =$$
$$= \frac{1}{7x - tgy} \cdot ((7x)'_y - (tgy)'_y) = \frac{1}{7x - tgy} \cdot \left(0 - \frac{1}{\cos^2 y}\right) = \frac{1}{\cos^2 y(tgy - 7x)}.$$

Тогда $dz = \dfrac{7}{7x - tgy}dx + \dfrac{1}{\cos^2 y(tgy - 7x)} \cdot dy$.

Задания для решения на практическом занятии

1. Найти область определения функции.

1.1 $z = \ln\dfrac{x - y}{x + y}$. 1.2 $z = \sqrt{y^2 - x + 4}$. 1.3 $z = \arccos(2x + y)$.

2. Найти частные производные первого порядка указанных функций.

2.1 $z = 5x^4y^3 + 3\ln y - 4^x$. 2.2 $z = x^2 \sin y + 4y\sqrt[5]{x} - arctgy$.

2.3 $z=\sqrt{y^3-xy+x^3}+\arcsin y$. 2.4 $z=\ln\left(\cos x+\sqrt{y}\right)-2y^4+3x$.

2.5 $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+6tg7x$. 2.6 $z=tg\left(\dfrac{x^2}{y}\right)+\log_2(3x-y^5)$.

3. Найти частные производные второго порядка указанных функций и проверить, равны ли их смешанные частные производные.

3.1 $z=x^2y^5-x\sin y+\log_3 x$. 3.2 $z=2x^2y^6+\ln y-\cos(xy^2)$.

3.3 $z=\arccos(x^3y^2-2x)$. 3.4 $z=\sqrt{x^2-2y^3}$.

4. Вычислить значения частных производных первого порядка функции *u=u(x;y;z)* в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

4.1 $u=\dfrac{x+y^2}{z}$, $M_0(1;2;1)$. 4.2 $u=\sqrt{x^3}-\dfrac{\sqrt{y}}{z^2}$, $M_0(4;1;3)$.

4.3 $u=ze^{-xy}$, $M_0(3;0;2)$.. 4.4 $u=\ln(x^2+3y)+z^4$, $M_0(1;0;2)$.

5. Найти полный дифференциал функции.

5.1 $z=arctg(x^3-\sqrt[3]{y})$. 5.2 $z=y^2 4^{\frac{y}{x}}$. 5.3 $z=\sqrt{x}ctg(x^4y^2)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти область определения функции.

1.1 $z=\ln\dfrac{x-1}{y+5}$. 1.2 $z=\sqrt{\dfrac{y+1}{x-2}}$. 1.3 $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y+1}}$.

1.4 $z=\sqrt{x^2+y^2-9}$. 1.5 $z=\sqrt{5x+y-10}$. 1.6 $z=\sqrt{2x^2+y-4}$.

1.7 $z=\arcsin\left(y-x^2\right)$. 1.8 $z=\arcsin(y-\sqrt{x})$. 1.9 $z=\arccos(2y-x+1)$

1.10 $z=\sqrt{y}\arccos x$.

2. Найти частные производные первого и второго порядка функции.

2.1 $z=2x^5\cos y-9\sqrt[3]{y}+7arctgx$. 2.2 $z=8\sqrt{x}y^2-3\log_2 x+4^y$.

2.3 $z=5y^4\sin x+6\sqrt{x^3}-4\ln y$. 2.4 $z=3x^2y^7-8\sqrt[4]{y}-3arcctgx$.

2.5 $z=7x^3y^6-4\log_3 y+16\sqrt[4]{x^3}$. 2.6 $z=12\sqrt[6]{x}-7x^4y^3+5arctgy$.

2.7 $z=y\ln x-3x^5y^2+15\sqrt[5]{y^2}$. 2.8 $z=3x^5\cos y-10\sqrt[5]{x^3}+4\ln y$.

2.9 $z=5x^4\log_5 y+\sqrt{x^7}-6^y$. 2.10 $z=6x^3y^4-4\log_3 x+x\sqrt{y^7}+2y$.

3. Найти полный дифференциал функции.

3.1 $z=y\ln\left(x^2-2^y\right)$. 3.2 $z=\arcsin\left(x\sqrt[3]{y}\right)$.

3.3 $z=tg\left(\dfrac{\sin x}{y^2}\right)$. 3.4 $z=ctg\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$.

3.5 $z=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+2y}}$.

3.6 $z=tg\left(\dfrac{y}{5x-y^2}\right)$.

3.7 $z=\arccos(3\ln y-\sqrt[5]{x})$.

3.8 $z=x\log_5(6x^2+\sqrt{y})$.

3.9 $z=\sqrt[3]{\ln y-\sqrt{x}}$.

3.10 $z=arcctg\left(\cos x+5y^2\right)$.

1.2 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в точке *M* называется плоскость, содержащая все касательные к кривым, проведенным на этой поверхности через точку *M*.

Нормалью к поверхности в точке *M* называется прямая, проходящая через точку *M* и перпендикулярная касательной плоскости к данной поверхности в точке *M*.

Если поверхность задана уравнением в явном виде *z=f(x;y)* и $M(x_0;y_0;z_0)-$ точка на поверхности, то уравнение касательной плоскости к поверхности в этой точке имеет вид

$$z-z_0=f'_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0), \qquad (1.2)$$

а нормаль к поверхности в этой точке определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (1.3)$$

Если поверхность задана уравнением в неявном виде *F(x;y;z)=0* и $M(x_0;y_0;z_0)-$ точка на поверхности, то уравнение касательной плоскости к поверхности в этой точке имеет вид

$$F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0, \qquad (1.4)$$

а нормаль к поверхности в этой точке определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)}. \qquad (1.5)$$

Пример 1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=2x^2-3y^2+xy+3x+1$ в точке, для которой $x=1, y=-1$.

Решение. Подставим $x=1$ и $y=-1$ в данное уравнение поверхности и определим аппликату точки касания:

$$z=2\cdot1^2-3\cdot(-1)^2+1\cdot(-1)+3\cdot1+1=2.$$

Следовательно, точкой касания является точка $M(1;-1;2)$, откуда получаем $x_0=1, y_0=-1, z_0=2$.

Так как уравнение поверхности задано в виде *z=f(x;y)*, то касательная плоскость определяется уравнением (1.2), а нормаль – уравнениями (1.3). Найдем частные производные и вычислим их значения в точке касания:

$$f'_x = (2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1)'_x = 4x + y + 3, \quad f'_x(1;-1) = 4 \cdot 1 + (-1) + 3 = 6,$$

$$f'_y = (2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1)'_y = -6y + x, \quad f'_y(1;-1) = -6 \cdot (-1) + 1 = 7.$$

Подставим эти значения и координаты точки M соответственно в уравнения (1.2) и (1.3), получим уравнение касательной плоскости:

$$z - 2 = 6(x - 1) + 7(y + 1) \text{ или } 6x + 7y - z + 3 = 0,$$

и уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-2}{-1}.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Для данных поверхностей найти уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках.

1.1 $2x^3 + xy^2 + z^2 + 5zx^3 + 2 = 0, \quad M(1;0;-1)$.

1.2 $x^3 - 5y^2 + z^2 + 7y + x = 1, \quad M(-2;1;3)$.

1.3 $z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1, \quad M(1;-1;2)$.

1.4 $z = 4x^2 - 7y^2 + 2xy + x, \quad M(5;-3;12)$.

2. Для эллипсоида $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ записать уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $x - y + 2z = 0$.

3. Показать, что поверхности $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ и $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ касаются друг друга, т. е. имеют общую касательную плоскость в точке $M(2;-3;1)$.

4. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 4 + 2x^2 + y^2$ в точке $M(1;-1;z)$.

5. Для поверхности $z = xy$ написать уравнение касательной плоскости, перпендикулярной прямой $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+5}{-1}$.

6. На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости *Oxz*.

Задания для самостоятельного решения

1. Для данных поверхностей найти уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках.

1.1 $2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0, \quad M(1;-1;1)$.

1.2 $z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1, \quad M(1;-1;2)$.

1.3 $z = 2x^2 + y^2 + 4xy - 5x + 10, \quad M(1;-2;3)$.

1.4 $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8, \quad M(0;-2;0)$.

1.5 $x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4$, $M(1;1;2)$.

1.6 $z = x^2 + y^2 - 3xy + x - y + 2$, $M(1;2;0)$.

1.7 $z = 2y^2 - 3x^2 - 2x + 4y + 10$, $M(1;-1;3)$.

1.8 $2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3$, $M(1;2;1)$.

1.9 $x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14$, $M(3;1;4)$.

1.10 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 8 = 0$, $M(-1;1;2)$.

1.3 Экстремум функции двух переменных

Пусть функция *z=f(x;y)* определена в некоторой области D и точка $M_0(x_0; y_0) \in D$.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется ***точкой локального максимума (минимума)*** функции *z=f(x;y)*, если существует такая окрестность точки M_0, что для каждой точки $M(x; y) \neq M_0(x_0; y_0)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0; y_0) > f(x; y)$ $\left(f(x_0; y_0) < f(x; y)\right)$.

Максимум и минимум функции называют ее ***экстремумами.*** Значение функции в точке локального максимума (минимума) называется ***локальным максимумом (минимумом) функции***. В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Теорема 1.3 (необходимое условие существования экстремума). Если функция *z=f(x;y)* в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет локальный экстремум, то в этой точке обе частные производные первого порядка, если они существуют, равны нулю или хотя бы одна из них в этой точке не существует.

Точки, в которых обе частные производные первого порядка равны нулю, называются ***стационарными.*** Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна из них не существует, называются ***критическими***.

Равенство нулю является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Для нахождения экстремумов необходимо каждую критическую точку подвергнуть дополнительному исследованию.

Теорема 1.4 (достаточное условие существования экстремума). Пусть в критической точке $M_0(x_0; y_0)$ и некоторой ее окрестности функция *z=f(x;y)* имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Введем следующие обозначения:

$$A = z''_{xx}(x_0; y_0), \quad B = z''_{xy}(x_0; y_0), \quad C = z''_{yy}(x_0; y_0),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция *z=f(x;y)* в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет экстремум, причем максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то функция *z=f(x;y)* в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремума не имеет;

3) если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай), то есть экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$ может быть, а может и не быть.

При исследовании функции двух переменных на экстремум рекомендуется использовать следующую схему.

1. Найти частные производные первого порядка z'_x и z'_y.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$ и найти критические точки функции.

3. Найти частные производные второго порядка $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$.

4. Вычислить значения частных производных второго порядка в каждой критической точке и, используя достаточное условие, сделать вывод о наличии экстремума.

5. Найти экстремумы функции (в случае их наличия).

Пример 1. Исследовать функцию $z = x^3 + y^2 - 3x + 2y$ на экстремум.

Решение. 1. Найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = (x^3 + y^2 - 3x + 2y)'_x = 3x^2 - 3,$$

$$z'_y = (x^3 + y^2 - 3x + 2y)'_y = 2y + 2.$$

2. Для определения критических точек решим систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0, \\ 2y + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1, \\ y = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1, \end{array} \right. \\ y = -1, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1, \\ y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, получили две критические точки:

$$M_1(-1;-1) \text{ и } M_2(1;-1).$$

3. Найдём частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (3x^2 - 3)'_x = 6x,$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (3x^2 - 3)'_y = 0,$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (2y + 2)'_y = 2.$$

4. Вычислим поочередно значения частных производных второго порядка в каждой критической точке и сделаем вывод.

Для точки $M_1(-1;-1)$ имеем:

$A = z''_{xx}(-1;-1) = -6, \;\; B = z''_{xy}(-1;-1) = 0, \;\; C = z''_{yy}(-1;-1) = 2,$

$\Delta = AC - B^2 = -6 \cdot 2 - 0^2 = -12 < 0 \Rightarrow$ в точке M_1 экстремума нет.

Для точки $M_2(1;-1)$ имеем:

$A = z''_{xx}(1;-1) = 6, \;\; B = z''_{xy}(1;-1) = 0, \;\; C = z''_{yy}(1;-1) = 2,$

$\Delta = AC - B^2 = 6 \cdot 2 - 0^2 = 12 > 0 \Rightarrow$ в точке M_2 функция имеет экстремум; так как A=6>0, то это минимум.

5. Найдем значение функции в точке M_2:

$$z_{\min} = z(1;-1) = 1^3 + (-1)^2 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -3.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Исследовать на экстремум функцию $z = f(x;y)$.

1.1 $z = 2x^3 + 6xy^2 - 30x - 24y$.

1.2 $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

1.3 $z = x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1$.

1.4 $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

1.5 $z = 2xy - 4x - 2y$.

1.6 $z = e^{-2x^2}(x - y^2)$.

2. Найти стороны прямоугольного треугольника, имеющего при данной площади S наименьший периметр.

3. Представить положительное число N в виде трех слагаемых таким образом, чтобы их произведение было наибольшим.

Задания для самостоятельного решения

1. Исследовать на экстремум функцию $z = f(x;y)$.

1.1 $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.

1.2 $z = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y$.

1.3 $z = x^2 y - y^3 - x^2 - 3y^2 + 3$.

1.4 $z = 8x^3 - y^3 - 12xy - 1$.

1.5 $z = 3x^2 - 6xy - y^3 - 12x + 12y$.

1.6 $z = x^2 y - 2y^3 - x^2 - 5y^2$.

1.7 $z = -8x^3 + 6x^2 y + y^3 + 9y^2$.

1.8 $z = 2x^3 - 12x^2 y + 15y^3 - 9y^2$.

1.9 $z = -\frac{1}{2} x^2 + 8xy - y^3 - 13x - 12y$.

1.10 $z = 2x^2 + 3xy + 2y^3 + 5x$.

1.4 Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Теорема 1.5. Если функция $z = f(x;y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значений. Эти значения достигаются функцией либо в критических точках, принадлежащих области D, либо в граничных точках области.

Если функция имеет точки разрыва в ограниченной замкнутой области или непрерывна в незамкнутой области, то она может и не иметь ни наибольшего, ни наименьшего значений.

Необходимо отметить, что нельзя смешивать наибольшее и наименьшее значения функции в области (глобальный экстремум) с максимумом или минимумом функции (локальный экстремум), которые являются наибольшим или наименьшим значением функции только по сравнению с ее значениями в соседних точках.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в ограниченной замкнутой области D рекомендуется использовать следующую схему.

1. Изобразить на координатной плоскости указанную область D.

2. Найти все критические точки функции, принадлежащие D, и вычислить значения функции в этих точках.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области.

4. Сравнить все полученные значения и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x + y - xy$ в замкнутой области D, ограниченной линиями $y = 2x$, $y = 4$, $x = 0$.

Решение. 1. Изобразим область D (рис. 1.2).

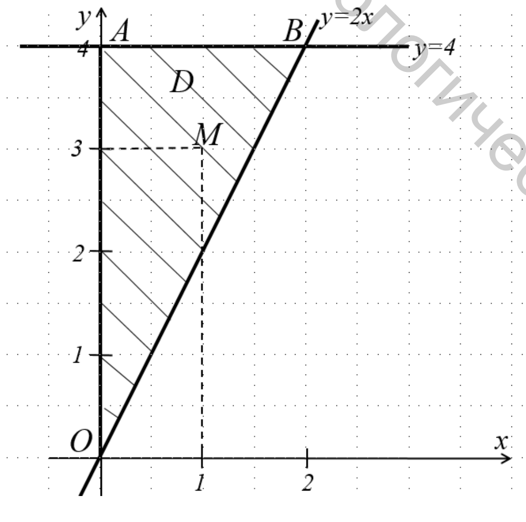

Рисунок 1.2 – Область D

2. Найдём все критические точки функции.

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - y = 0, \\ 1 - x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3. \\ x = 1. \end{cases}$$

Получили одну критическую точку $M(1;3)$ причем $M \in D$ Вычислим значение функции в этой точке:

$$z(1;3) = 3 \cdot 1 + 3 - 1 \cdot 3 = 3.$$

3. Исследуем функцию на границе области. Поскольку граница состоит из трех отрезков *OA*, *AB* и *OB*, задаваемых различными аналитическими выражениями, то задачу нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных на каждом из отрезков можно свести к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений некоторой функции одной переменной *x* или *y*.

а) На отрезке *OA*: $x = 0, y \in [0;4]$. Тогда

$z(0;y) = 3 \cdot 0 + y - 0 \cdot y = y = g_1(y), y \in [0;4]$;

$g_1'(y) = y_y' = 1 \Rightarrow$ критических точек нет.

Найдём значения функции на концах отрезка:

$$g_1(0) = 0 = z(0;0),$$

$$g_1(4) = 4 = z(0;4).$$

б) На отрезке *AB*: $y = 4, x \in [0;2]$. Тогда

$z(x;4) = 3x + 4 - x \cdot 4 = 4 - x = g_2(x), x \in [0;2]$;

$g_2'(x) = (4 - x)_x' = -1 \Rightarrow$ критических точек нет.

Найдём значения функции на концах отрезка:

$$g_2(0) = 4 = z(0;4),$$

$$g_2(2) = 2 = z(2;4).$$

в) На отрезке *OB*: $y = 2x, x \in [0;2]$. Тогда

$z(x;2x) = 3x + x - x \cdot 2x = 4x - 2x^2 = g_3(x), x \in [0;2]$;

$g_3'(x) = (4x - 2x^2)_x' = 4 - 4x$,

$g_3'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1 \in [0;2]$.

Найдём значения функции в найденной критической точке и на концах отрезка:

$$g_3(1) = 2 = z(1;2),$$

$$g_3(0) = 0 = z(0;0),$$

$$g_3(2) = 0 = z(2;4).$$

4. Из множества полученных значений выберем наибольшее и наименьшее:

$$z_{наиб} = 4 = z(0;4),$$

$$z_{наим} = 0 = z(0;0) = z(2;4).$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x; y)$ в указанной области *D*.

1.1 $z = x^2 + 3y^2 - y + x$, $D: x = 1, y = 1, x + y = 1$.

1.2 $z = 3x^3 - xy^2 + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.

1.3 $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$, $D: y = 8, y = 2x^2$.

1.4 $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $D: y = \sqrt{1 - x^2}, y = 0$.

1.5 $z = y^2 + 2xy - 10$, $D: x = y^2 - 4, x = 0$.

2. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда, который при данной площади полной поверхности *S* имеет наибольший объем.

3. Из всех прямоугольников с заданной площадью *S* найти такой, у которого периметр имеет наименьшее значение.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x; y)$ в указанной области *D*.

1.1 $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$, $D: x = 0, y = 0, x + y + 2 = 0$.

1.2 $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, $D: x = -1, x = 1, y = 0, y = 3$.

1.3 $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.

1.4 $z = x^2 + 2xy - 4x - y^2$, $D: x = 3, y = 0, y = x + 1$.

1.5 $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$, $D: x = 0, y = 0, 2x + 3y = 12$.

1.6 $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$, $D: y = 2x, y = 2, x = 0$.

1.7 $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.

1.8 $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$.

1.9 $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $D: x = 5, y = 0, y = x - 1$.

1.10 $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $D: x = 0, y = 0, x = 1, y = 2$.

2 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

2.1 Определение комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом называется упорядоченная пара $(x; y)$ действительных чисел *x* и *y*.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ называются ***равными*** тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексным нулем считают пару $(0;0)$. Число, противоположное комплексному числу $z = (x; y)$, определяется как $(-x;-y)$ и обозначается *-z*.

Пусть $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ – два комплексных числа. Арифметические операции над двумя комплексными числами, результатом выполнения которых является тоже комплексное число, определяются следующим образом:

1) сумма (разность): $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$;

2) произведение: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2; x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$;

3) деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \dfrac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$;

В частности

$$(x_1;0) \pm (x_2;0) = (x_1 \pm x_2;0);$$
$$(x_1;0) \cdot (x_2;0) = (x_1 \cdot x_2;0);$$
$$\frac{(x_1;0)}{(x_2;0)} = \left(\frac{x_1}{x_2};0 \right).$$

Следовательно, множество действительных чисел вкладывается в множество комплексных чисел и можно отождествлять комплексное число вида $(x;0)$ и действительное число *x*:

$$(x;0) \equiv x.$$

Введем обозначение: $i = (0;1)$. Тогда по правилу умножения

$$i^2 = (0;1) \cdot (0;1) = (-1;0) = -1$$

и введенное таким образом число *i* называют ***мнимой единицей***.

Теперь любое комплексное число можно записать в виде

$$z = (x; y) = (x;0) + (y;0) \cdot (0;1) = x + yi$$

или

$$z = (x; y) = x + yi.$$

Такую форму записи называют ***алгебраической формой записи комплексного числа***. При этом x называют ***действительной частью*** z и обозначают $Re\, z$, а y – ***мнимой частью*** z и обозначают $Im\, z$.

Алгебраическая форма имеет важное практическое значение: над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно осуществлять все арифметические операции как над обычными двучленами, учитывая лишь, что $i^2 = -1$.

Чтобы преобразовать в комплексное число дробь вида $\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i}$, нужно и числитель, и знаменатель дроби умножить на число $x_2 - y_2 i$; числа $x_2 + y_2 i$ и $x_2 - y_2 i$ называются ***комплексно-сопряженными***.

Пример 1. Вычислить: а) $(5-3i)-(1-i)$; б) $(2+i)\cdot(6-5i)$; в) $\frac{6-i}{3+2i}$; г) $(2-3i)^3$.

Решение.

а) $(5-3i)-(1-i) = 5-3i-1+i = (5-1)+(-3+1)i = 4-2i$;

б) $(2+i)\cdot(6-5i) = 12-10i+6i-5i^2 = 12-4i-5\cdot(-1) = 12-4i+5 = 17-4i$;

в) $\frac{6-i}{3+2i} = \frac{(6-i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)\cdot(3-2i)} = \frac{18-12i-3i+2i^2}{9-4i^2} = \frac{18-15i+2\cdot(-1)}{9-4\cdot(-1)} =$

$= \frac{18-15i-2}{9+4} = \frac{16-15i}{13} = \frac{16}{13} - \frac{15}{13}i$;

г) $(2-3i)^3 = \left[(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\right] = 8-36i+54i^2-27i^3 =$

$= \left[i^3 = i^2\cdot i = -1\cdot i = -i\right] = 8-36i-54-27\cdot(-i) = -46-36i+27i = -46-9i$.

Пример 2. Найти все корни квадратного уравнения $x^2+4x+13=0$.

Решение. Воспользуемся формулами для нахождения корней квадратного уравнения.

$D = b^2-4ac = 16-52 = -36 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{-36} = \sqrt{-1\cdot 36} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{36} = i\cdot 6 = 6i$,

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-4+6i}{2} = -2+3i, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-4-6i}{2} = -2-3i$.

Задания для решения на практическом занятии

1. Вычислить значение выражения.

1.1 $(3+2i)+(7-8i)$. 1.2 $(9-i)-(-1+7i)$. 1.3 $(-6+5i)\cdot(1-3i)$.

1.4 $(5-i)\cdot(-2+3i)$. 1.5 $\frac{7+i}{1-3i}$. 1.6 $\frac{-2+5i}{2+i}$.

1.7 $(3-5i)^2$.

1.8 $\dfrac{3+2i}{-1-i}+\left(\dfrac{4-i}{2+i}\right)^2$.

1.9 $\dfrac{(5-i)^2}{i}$.

1.10 i^{25}.

1.11 $(5+i)^3$.

1.12 $(2-i)^3\cdot i^{121}$

2. Найти все корни уравнения.

2.1 $x^2-2x+10=0$.

2.2 $x^2+4x+5=0$.

2.3 $3x^2-2x+2=0$.

2.4 $x^2+4=0$.

2.5 $x^4-1=0$.

2.6 $x^3+12x=0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить значение выражения.

1.1 а) $(3+i)\cdot(-2-3i)$; б) $\dfrac{1+5i}{2-3i}$; в) $\dfrac{(4-i)\cdot i^9}{(3+i)^2}$.

1.2 а) $(-2-i)\cdot(5+2i)$; б) $\dfrac{4-i}{-1-3i}$; в) $\dfrac{(1+2i)^2\cdot i^{17}}{5-i}$.

1.3 а) $(7-2i)\cdot(1-3i)$; б) $\dfrac{5+2i}{2+i}$; в) $\dfrac{6-5i}{(2-i)^2\cdot i^{13}}$.

1.4 а) $(9-5i)\cdot(1+3i)$; б) $\dfrac{3+7i}{-2-3i}$; в) $\dfrac{(4-3i)\cdot i^{15}}{(1+i)^3}$.

1.5 а) $(3-2i)\cdot(2-3i)$; б) $\dfrac{7+2i}{-2-i}$; в) $\dfrac{(3+5i)\cdot i^{11}}{(8-i)^2}$.

1.6 а) $(5-2i)\cdot(2-7i)$; б) $\dfrac{1+5i}{2-3i}$; в) $\dfrac{(4-i)^3}{(3-2i)\cdot i^{25}}$.

1.7 а) $(-6-5i)\cdot(1+3i)$; б) $\dfrac{-1-5i}{3+7i}$; в) $\dfrac{(3-5i)^2}{(1-i)\cdot i^{17}}$.

1.8 а) $(8+3i)\cdot(-2-i)$; б) $\dfrac{-3+5i}{2-7i}$; в) $\dfrac{(-1-i)\cdot i^5}{(1+5i)^2}$.

1.9 а) $(-3+7i)\cdot(-2-5i)$; б) $\dfrac{-6-2i}{4+3i}$; в) $\dfrac{(2+i)^3\cdot i^7}{-1-i}$.

1.10 а) $(2-9i)\cdot(-3-5i)$; б) $\dfrac{4-7i}{-2+i}$; в) $\dfrac{(6-i)\cdot i^9}{(1+2i)^2}$.

2. Найти все корни уравнения.

2.1 а) $x^2-4x+13=0$; б) $x^2+2=0$; в) $x^4-16=0$.

2.2 а) $x^2+2x+17=0$; б) $x^2+5=0$; в) $x^4-81=0$.

2.3 а) $x^2-4x+20=0$; б) $x^2+12=0$; в) $x^4-9=0$.

2.4 а) $3x^2+2x+2=0$; б) $x^2+20=0$; в) $x^4-25=0$.

2.5	а) $x^2-4x+29=0$;	б) $x^2+24=0$;	в) $x^4-36=0$.
2.6	а) $x^2-2x+2=0$;	б) $x^2+32=0$;	в) $x^4-49=0$.
2.7	а) $x^2-6x+10=0$;	б) $x^2+20=0$;	в) $x^4-625=0$.
2.8	а) $x^2+8x+25=0$;	б) $x^2+7=0$;	в) $x^4-100=0$.
2.9	а) $x^2+12x+37=0$;	б) $x^2+18=0$;	в) $x^4-121=0$.
2.10	а) $x^2-2x+5=0$;	б) $x^2+100=0$;	в) $x^4-64=0$.

2.2 Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

Геометрически каждое комплексное число $z=(x;y)=x+yi$ изображается точкой $M(x;y)$ на координатной плоскости *XOY*, и тогда плоскость *XOY* называется ***плоскостью комплексных чисел*** (рис. 2.1).

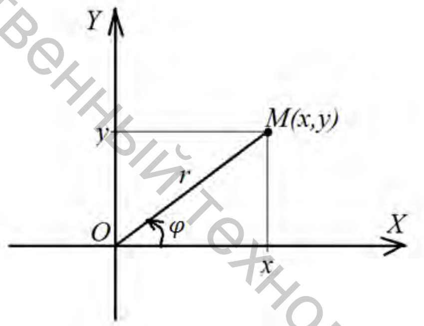

Рисунок 2.1 – Изображение комплексного числа на плоскости

Число $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется ***модулем комплексного числа*** $z=(x;y)=x+yi$ и обозначается $|z|$. Модуль числа *z* равен расстоянию от точки *M*, изображающей это число, до начала координат.

Всякое решение φ следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

называется ***аргументом комплексного числа*** $z=x+yi$. Все аргументы числа *z* различаются на целые, кратные 2π, и обозначаются единым символом $Arg\ z$. Каждое значение аргумента совпадает с величиной φ некоторого угла, на который следует повернуть ось *OX* до совпадения ее с радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$

точки M (при этом $\varphi > 0$, если поворот осуществляется против хода часовой стрелки, и $\varphi < 0$ в противном случае).

Значение $Arg\ z$, удовлетворяющее условию $0 \le Arg\ z < 2\pi$, называется ***главным значением аргумента*** и обозначается *arg z*.

Для любого комплексного числа $z = x + yi$ справедливо равенство

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = arg\, z$. Такая форма записи называется ***тригонометрической формой*** комплексного числа *z*.

Заметим, что если положить

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

(это соотношение называется формулой Эйлера), то приходим к ***показательной форме*** записи комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Пример 1. Представить в тригонометрической и показательной форме число $z = -\sqrt{3} - i$.

Решение. Найдем модуль и аргумент комплексного числа.

$$r = |z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2, \quad \begin{cases} \cos\varphi = -\sqrt{3}/2 \\ \sin\varphi = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{6}.$$

Тогда в тригонометрической форме число примет вид: $z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}\right)$, в показательной: $z = -\sqrt{3} - i = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Операции над комплексными числами в тригонометрической форме имеют следующий вид:

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right);$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right);$

3) $z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$

Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется такое комплексное число z_k, n-ая степень которого равна подкоренному числу. Справедлива формула:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ – арифметический корень степени *n*; *k=0,1,...n-1*.

Вышеприведенные формулы для комплексных чисел в показательной форме приобретают вид:

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_2 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$

2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;

3) $z^n=\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi}$;

4) $z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, $k=0,1,...,n-1$.

Пример 2. Вычислить z^5 и $\sqrt[3]{z}$, если $z=-1+i$.

Решение. Запишем число $z=-1+i$ в тригонометрической форме.

$$r=|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},\quad \begin{cases}\cos\varphi=-1/\sqrt{2}\\ \sin\varphi=1/\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\varphi=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow$$

$$z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Тогда $z^5=\left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)^5=\left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\dfrac{15\pi}{4}+i\sin\dfrac{15\pi}{4}\right)=$

$=\left[\dfrac{15\pi}{4}=\dfrac{16\pi-\pi}{4}=4\pi-\dfrac{\pi}{4}\right]=4\sqrt{2}\left(\cos\left(4\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=$

$=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=4-4i$;

$z_k=\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)}=$

$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi/4+2\pi k}{3}+i\sin\dfrac{3\pi/4+2\pi k}{3}\right)$, $k=0,1,2$.

Подставляя поочередно $k=0,1,2$ в последнее равенство, получим:

$z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi/4}{3}+i\sin\dfrac{3\pi/4}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=$

$=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

$z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi/4+2\pi}{3}+i\sin\dfrac{3\pi/4+2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right)$;

$z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi/4+4\pi}{3}+i\sin\dfrac{3\pi/4+4\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{12}+i\sin\dfrac{19\pi}{12}\right)$.

Задания для решения на практическом занятии

1. Записать в тригонометрической и показательной формах числа, заданные в алгебраической форме.

1.1 $z = i$. 1.2 $z = -2$. 1.2 $z = -\sqrt{3} - 3i$. 1.2 $z = \frac{2}{1+i}$.

2. Найти все значения корней.

2.1 $\sqrt[4]{64}$. 2.2 $\sqrt[5]{i}$. 2.3 $\sqrt{2+2i}$. 2.4 $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

3. Вычислить значение выражения.

3.1 $(1+i)^8$. 3.2 $\left(2-2\sqrt{3}i\right)^{16}$. 3.3 $\frac{(1+i)^{100}}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{20}}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Для заданного комплексного числа z вычислить z^n и $\sqrt[k]{z}$.

1.1 $z = -\sqrt{3} + i, n = 10, k = 3$.

1.2 $z = \sqrt{3} + i, n = 12, k = 4$.

1.3 $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, n = 14, k = 2$.

1.4 $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i, n = 20, k = 3$.

1.5 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, n = 8, k = 4$.

1.6 $z = -\sqrt{3} - i, n = 25, k = 2$.

1.7 $z = 2 - 2i, n = 8, k = 4$.

1.8 $z = \sqrt{3} + 3i, n = 10, k = 3$.

1.9 $z = 3 - \sqrt{3}i, n = 10, k = 3$.

1.10 $z = -3 + \sqrt{3}i, n = 6, k = 5$.

3 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1 Основные понятия

Дифференциальным уравнением **(ДУ)** называется уравнение, связывающее независимые переменные, искомую функцию от этих переменных и производные (или дифференциалы) этой функции. Если искомая функция зависит от одной переменной, то такое ДУ называют ***обыкновенным***. ***Порядком*** **ДУ** называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

В общем случае дифференциальное уравнение n-го порядка может быть записано в виде:

$$F(x; y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}) = 0, \qquad (3.1)$$

где x – независимая переменная, $y=y(x)$ – неизвестная функция.

Если уравнение (3.1) удастся разрешить относительно наивысшей производной, то полученное уравнение называется ***ДУ в нормальной форме***:

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; y''; \ldots; y^{(n-1)}). \qquad (3.2)$$

Решением ДУ (3.1) называется любая функция $y=y(x)$, определенная на некотором интервале $(a;b)$, которая при подстановке в ДУ (3.1) обращает его в тождество.

Если функция, которая является решением уравнения (3.1), определена в неявном виде $F(x;y)=0$, то $F(x;y)=0$, называется ***интегралом,*** а не решением данного ДУ.

График решения или интеграла ДУ (3.1) или (3.2) называется ***интегральной кривой***, а процесс нахождения решения – ***интегрированием ДУ***.

Задача Коши для ДУ n-го порядка состоит в нахождении такого решения $y=y(x)$, которое удовлетворяет ***начальным условиям***:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ y''(x_0)=y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}, \qquad (3.3)$$

где $x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ – заданные числа.

Общим решением ДУ (3.1) или (3.2) называется функция вида $y=y(x;C_1;C_2;\ldots;C_n)$, где C_i $(i=1\ldots n)$ – произвольные постоянные, удовлетворяющая двум условиям:

1) эта функция является решением ДУ (3.1) или (3.2) при любых значениях C_i $(i=1\ldots n)$;

2) для любых заданных начальных условий (3.3) существуют единственные значения постоянных $C_1=C_1^0, C_2=C_2^0, \ldots, C_n=C_n^0$, при которых функция $y=y\left(x;C_1^0;C_2^0;\ldots;C_n^0\right)$ удовлетворяет заданным начальным условиям (3.3).

Общее решение, полученное в неявном виде: $\Phi(x;y;C_1;C_2;\ldots;C_n)=0$, называется ***общим интегралом***.

Решение или интеграл, полученные из общего решения или общего интеграла при фиксированных значениях произвольных постоянных C_i $(i=1\ldots n)$, называется ***частным решением*** или ***частным интегралом*** соответственно. В частности, частное решение или частный интеграл получим, решив задачу Коши.

Обыкновенное ДУ 1-го порядка в общем случае можно записать в виде:

$$F(x;y;y')=0 \qquad (3.4)$$

или, если это уравнение можно разрешить относительно y', то его можно представить ***в нормальной форме***:

$$y'=f(x;y). \qquad (3.5)$$

ДУ (3.5) всегда можно записать ***в дифференциальной форме*:**

$$P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0, \qquad (3.6)$$

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ – известные функции. Уравнение (3.6) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправные, то есть любую из них можно рассматривать как функцию от другой.

Заметим, что от вида ДУ (3.5) к виду (3.6) и наоборот можно перейти, воспользовавшись формулой

$$y' = \frac{dy}{dx}. \qquad (3.7)$$

Задача Коши для ДУ 1-го порядка:

$$y' = f(x;y),\ y(x_0) = y_0. \qquad (3.8)$$

Теорема 3.1 (существования и единственности задачи Коши). Если в ДУ $y'=f(x;y)$ функция $f(x;y)$ и ее частная производная $f'_y(x;y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости xOy, содержащей точку $M_0(x_0;y_0)$, то существует единственное решение $y=y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

3.2 Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Наиболее простым дифференциальным уравнением первого порядка является уравнение ***с разделенными переменными***:

$$P(x)dx+Q(y)dy=0, \qquad (3.9)$$

где $P(x)$ и $Q(y)$ – заданные функции. В этом ДУ переменные разделены, то есть одно слагаемое зависит только от x, а другое – только от y. Проинтегрировав почленно это уравнение, получим ***общий интеграл***:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C.$$

Пример 1. Найти решение ДУ $dy=4xdx$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=5$.

Решение. Проинтегрируем обе части ДУ:

$$\int dy = \int 4xdx + C,\ y = 2x^2 + C \ –$$

общее решение. Подставляя в общее решение начальное условие, найдем C:

$$y(1) = 5 \Rightarrow 5 = 2 \cdot 1 + C \Rightarrow C = 3.$$

Таким образом, функция $y = 2x^2 + 3$ является искомым частным решением данного ДУ.

Уравнение вида

$$P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0 \qquad (3.10)$$

называется ***дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными***.

Особенность ДУ (3.10) в том, что коэффициенты при dx и dy представляют собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая – только от y. Следует отметить, что некоторые из этих функций могут быть постоянными.

Уравнение (3.10) сводится к уравнению (3.9) путем почленного деления его на $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$. Получим:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0-$$

ДУ с разделенными переменными. Далее решение сводится к интегрированию левой и правой части:

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=C-$$

общий интеграл.

Замечание. При проведении почленного деления могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $Q_1(y)P_2(x)=0$ и установить те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения – особые решения. Однако в рамках данного курса особые решения рассматриваться не будут.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(x^2+\sqrt{x}\right)y^3dx-\left(1-y^2\right)xdy=0$.

Решение. Это ДУ с разделяющимися переменными. Разделив обе части на $y^3x\neq 0$, получим

$$\frac{x^2+\sqrt{x}}{x}dx-\frac{1-y^2}{y^3}dy=0,$$

$$\left(\frac{x^2}{x}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}\right)dx-\left(\frac{1}{y^3}-\frac{y^2}{y^3}\right)dy=0,$$

$$\left(x+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx-\left(y^{-3}-\frac{1}{y}\right)dy=0.$$

Почленно интегрируя, имеем:

$$\int\left(x+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx-\int\left(y^{-3}-\frac{1}{y}\right)dy=C,$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}-\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=C,$$

$$\frac{x^2}{2}+2\sqrt{x}+\frac{1}{2y^2}+\ln|y|=C-\text{ общий интеграл.}$$

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'\sin x-y\cos x=0$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Решение. Сначала найдем общее решение. Перейдя к уравнению в дифференциалах с помощью формулы $y'=\frac{dy}{dx}$ и последующего разделения переменных, получим:

$$\frac{dy}{dx}\sin x - y\cos x = 0 \ \Big| \times dx,$$

$$\sin x dy - y\cos x dx = 0 \ \Big| : \sin x \cdot y \neq 0,$$

$$\frac{\sin x dy}{\sin x \cdot y} - \frac{y\cos x dx}{\sin x \cdot y} = 0,$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{\cos x dx}{\sin x} = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\int\frac{dy}{y} - \int\frac{\cos x dx}{\sin x} = C,$$

$$\ln|y| - \int\frac{d(\sin x)}{\sin x} = C,$$

$$\ln|y| - \ln|\sin x| = \ln|C_1|,$$

$$\ln\left|\frac{y}{|\sin x|}\right| = \ln|C_1|,$$

$$\frac{y}{\sin x} = C_1,$$

$y = C_1 \sin x$ – общее решение.

Заметим, что, при нахождении общего решения воспользовались следующими свойствами натурального логарифма:

$$C = \ln e^C = \left[e^C = C_1\right] = \ln C_1,$$

$$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}.$$

Далее, используя указанное начальное условие $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, подставляем в общее решение заданные значения переменных $\left(x = \frac{\pi}{2}, y = 1\right)$ и определяем соответствующее значение произвольной постоянной:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow C_1 = 1.$$

Подставив значение C_1=1 в общее решение, получим частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$y = 1\cdot\sin x \text{ или } y = \sin x.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1.1 $x^4y^2dx+\sqrt[3]{x}ydy=0.$

1.2 $(y^2-4)dx+\sqrt{x^2+4}dy=0.$

1.3 $(5x^3y^2+y^2)dx=(9xy-2x)dy.$

1.4 $y'=(y^2+4y+10)\sin(7x).$

1.5 $\dfrac{y'}{3x-1}=(y^2-2y+1)\cos(4x).$

1.6 $x\ln^2 xy'=\sqrt{4-6y-y^2}.$

1.7 $y^3\ln y\cos^4 xy'=\sin x.$

1.8 $yy'=\sqrt{y^2+2}\cdot x^2 5^{x^3}$

2. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

2.1 $\dfrac{dy}{\sqrt[3]{4x-8}}+dx=0, y(2)=1.$

2.2 $2xy'=\dfrac{x+1}{y}, y(1)=2.$

2.3 $\sqrt{x}dy-2e^y dx=0, y(9)=0.$

2.4 $x^2y'=2xy-3\sqrt{x}y, y(1)=1.$

2.5 $(1+e^{2x})y^3y'=e^x, y(0)=0.$

2.6 $\dfrac{y}{\ln y}dx+xdy=0, y(1)=1.$

2.7 $y(1-x^2)y'+x\sqrt{1-y^2}=0, y(0)=1.$

2.8 $(x^2y-y)y'+(xy^2+x)=0, y(0)=0.$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1.1 $(x^2-2)ydx+x^2\sqrt[5]{y}dy=0.$

1.2 $(6xy-y)dx-(x^2y+7x^2)dy=0.$

1.3 $(1+x^2)y'=\sqrt[3]{x}(y^2-8y+5).$

1.4 $(8\sqrt{x}-1)\sin^2(3y)dx+x^2dy=0.$

1.5 $xy'=\sqrt[5]{x}(y^2+2y+8).$

1.6 $(8x-1)y'=y^2-10y+5.$

1.7 $\dfrac{y'}{x-\sqrt{x}}=\sqrt{y^2+y+4}.$

1.8 $(3x^2y+2x^2\sqrt{y})y'=xy^2-\dfrac{y^2}{x}.$

1.9 $\sqrt{x}(y^3-5y+8)y'=2xy-x^2y.$

1.10 $(x^2y-2x^2)y'=(6x^4-5x^2+1)y^2.$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

2.1 $y'=\dfrac{y^2}{\sqrt{x+1}}, y(3)=-\dfrac{1}{3}.$

2.2 $y'=\dfrac{\sqrt{y-1}}{x^2}, y(1)=5.$

2.3 $6\sqrt{x}y'=\dfrac{3x+1}{y^2}, y(1)=-1.$

2.4 $xy'=\dfrac{5x-2}{\sqrt{y}}, y(1)=9.$

2.5 $2xy'=y\sqrt{y}, y(1)=4.$

2.6 $\sqrt{x^2+1}(2y+1)y'=y, y(0)=1.$

2.7 $\dfrac{2x+1}{y}y'=y\sqrt{y}, y(0)=1.$

2.8 $y'=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{8y^3-2y+1}, y(1)=-1.$

2.9 $y'=4x(y^2-2y+1), y(2)=0.$

2.10 $xy'=(2x^2-3)\sqrt{y^2+1}, y(1)=0.$

3.3 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция *f(x;y)* называется ***однородной функцией измерения*** *n* относительно аргументов *x* и *y*, если для $\forall t \in R, t \neq 0$, при котором функция *f(tx;ty)* определена, выполняется равенство

$$f(tx;ty)=t^n f(x;y). \tag{3.11}$$

В частности, функция *f(x;y)* будет являться ***однородной функцией нулевого измерения***, если выполняется равенство

$$f(tx;ty)=f(x;y). \tag{3.12}$$

Пример 1. Установить, являются ли следующие функции однородными относительно аргументов *x* и *y*: а) $f(x;y)=2x^3-5xy^2$; б) $f(x;y)=\sin\frac{y}{x}$.

Решение. Проверим выполнение условия (3.11).

а) $f(tx;ty)=2(tx)^3-5tx(ty)^2=2t^3x^3-5txt^2y^2=2t^3x^3-5t^3xy^2=$
$=t^3\left(2x^3-5xy^2\right)=t^3 f(x;y) \Rightarrow$ функция является однородной измерения $n=3$;

б) $f(tx;ty)=\sin\frac{ty}{tx}=\sin\frac{y}{x}=f(x;y) \Rightarrow$ функция является однородной нулевого измерения.

Дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$y'=f(x;y) \tag{3.13}$$

называется ***однородным дифференциальным уравнением первого порядка***, если *f(x;y)* – однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов *x* и *y*.

Дифференциальное уравнение в дифференциальной форме

$$P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0 \tag{3.14}$$

называется ***однородным дифференциальным уравнением первого порядка***, если *P(x;y)* и *Q(x;y)* – однородные функции одинакового измерения относительно своих аргументов *x* и *y*.

Однородное дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$y=ux, \tag{3.15}$$

где *u=u(x)* – пока неизвестная функция.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

Решение.

$$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y \quad \Big|: x\neq 0,$$

$$y'=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}+\frac{y}{x},$$

$$y' = \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}.$$

Проверим, является ли функция $f(x;y) = \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$ однородной нулевого измерения:

$$f(tx;ty) = \sqrt{1-\frac{(ty)^2}{(tx)^2}} + \frac{ty}{tx} = \sqrt{1-\frac{t^2y^2}{t^2x^2}} + \frac{y}{x} = \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} = f(x;y).$$

Поскольку выполняется условие (3.12), то функция является однородной нулевого измерения, а дифференциальное уравнение – однородным ДУ первого порядка. Применив подстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$u'x + u = \sqrt{1-\frac{(ux)^2}{x^2}} + \frac{ux}{x},$$

$$u'x + u = \sqrt{1-\frac{u^2x^2}{x^2}} + u,$$

$$u'x = \sqrt{1-u^2},$$

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1-u^2},$$

$$xdu = \sqrt{1-u^2}\,dx \quad \Big|: x\sqrt{1-u^2} \neq 0,$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\arcsin u = \ln|x| + C.$$

Возвращаясь к переменной y $\left(y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}\right)$, приходим к общему интегралу:

$$\arcsin\frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $(x+y)dx - xdy = 0$ при заданном начальном условии $y(1)=2$.

Решение. Поскольку функции $P(x;y)=x+y$ и $Q(x;y)=x$ являются однородными измерения $n=1$, то дифференциальное уравнение является однородным первого порядка. Применив подстановку $y=ux$, $dy=udx+xdu$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$(x+ux)dx - x(udx + xdu) = 0,$$

$$x(1+u)dx - x(udx + xdu) = 0 \ \big|: x \neq 0,$$

$$(1+u)dx - (udx + xdu) = 0,$$

$$dx + udx - udx - xdu = 0,$$

$$dx - xdu = 0 \ \big|: x \neq 0,$$

$$\frac{dx}{x} - du = 0,$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int du = C,$$

$$\ln|x| - u = C.$$

Возвращаясь к переменной y $\left(y = ux \Rightarrow u = \dfrac{y}{x} \right)$, приходим к общему интегралу: $\ln|x| - \dfrac{y}{x} = C$.

Подставляя заданные начальные условия, получим: $y(1) = 2 \Rightarrow \ln 1 - 2 = C \Rightarrow 0 - 2 = C \Rightarrow C = -2$. Значит, искомым частным интегралом будет

$$\ln|x| - \frac{y}{x} = -2 \text{ или } \ln|x| + 2 = \frac{y}{x}.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1.1 $\left(y^2 - 5xy\right)dx + x^2 dy = 0$.

1.2 $(x - 2y)y' = y$.

1.3 $y' = \dfrac{5y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$.

1.4 $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

1.5 $y' = \sqrt{\dfrac{7y}{x} - 2} + \dfrac{y}{x}$.

1.6 $3x^2 dy - \left(x^2 + 3xy + 2y^2\right)dx = 0$.

2. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

2.1 $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$, $y(1) = 0$.

2.2 $xy' = 3y + 5x$, $y(1) = -2$

2.3 $2x^2 y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 0$.

2.4 $yy' = xe^{\frac{4y}{x}} + \dfrac{y^2}{x}$, $y(1) = 0$.

2.5 $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(e) = 0$.

2.6 $\left(x^2 - y^2\right)y' = xy$, $y(1) = 1$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1.1 $\left(y^2+4x^2\right)y'=xy$.

1.2 $x^2y'+y^2=3xy$.

1.3 $y^2+\left(7x^2-xy\right)y'=0$.

1.4 $y'=\sin^2\dfrac{4y}{x}+\dfrac{y}{x}$.

1.5 $(x+2y)dx-xdy=0$.

1.6 $xyy'=x+y$.

1.7 $xy'=2\sqrt{xy}+y$.

1.8 $2x^3y'=2x^2y-y^3$.

1.9 $x^2dy-y(x+y)dx=0$.

1.10 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

3.4 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Пусть функции *p(x)* и *q(x)* определены и непрерывны на некотором промежутке *I*, в частности они могут быть постоянными.

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x). \tag{3.16}$$

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x)y^n,\ \ n\neq 0, n\neq 1. \tag{3.17}$$

Решение уравнений (3.16) и (3.17) можно найти с помощью ***подстановки Бернулли***

$$y=uv,$$

где *u=u(x)* и *v=v(x)* – неизвестные функции, которые находят поочередно в ходе решения. Причем одной из этих функций можно распорядиться достаточно произвольно, а вторая должна быть определена в зависимости от первой таким образом, чтобы их произведение удовлетворяло данному уравнению.

Идею нахождения общего решения проследим на примере уравнения (3.16).

Из равенства *y=uv* находим производную: $y'=u'v+uv'$. Подставляя *y* и *y'* в уравнение (3.16), получим

$$\underbrace{u'v+uv'}_{y'}+p(x)\underbrace{uv}_{y}=q(x)$$

или

$$u'v+u\left(v'+p(x)v\right)=q(x). \tag{3.18}$$

Мы имеем одно дифференциальное уравнение с двумя неизвестными функциями. Добавим еще одно условие. Подберем функцию *v=v(x)* так, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль:

$$v'+p(x)v=0.$$

Имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, решая его, получим

$$\frac{dv}{dx}+p(x)v=0,$$

$$dv+p(x)vdx=0,$$

$$\frac{dv}{v}+p(x)dx=0,$$

$$\int\frac{dv}{v}+\int p(x)dx=C.$$

Положим C=0, тогда

$$\ln|v|+\int p(x)dx=0,$$

$$\ln|v|=-\int p(x)dx,$$

$$v=e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставляя $v=e^{-\int p(x)dx}$ в уравнение (3.18), получим тоже дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, найдем его общее решение:

$$u'e^{-\int p(x)dx}=q(x),$$

$$\frac{du}{dx}e^{-\int p(x)dx}=q(x),$$

$$e^{-\int p(x)dx}du=q(x)dx,$$

$$du=q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

$$u=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

Таким образом, по найденным u и v составим искомую функцию y:

$$y=uv=\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)e^{-\int p(x)dx}. \qquad (3.19)$$

Полученная формула дает общее решение линейного ДУ (3.16). При этом следует отметить, что нет необходимости запоминать формулу (3.19), а нужно лишь помнить способ решения и уметь его применять в каждом конкретном случае.

Заметим, что общее решение дифференциального уравнения (3.17) методом Бернулли находят аналогично.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'+ytgx=\frac{1}{\cos x}$.

Решение. Уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Положив $y=uv,\quad y'=u'v+uv'$, имеем

$$u'v+uv'+uvtgx=\frac{1}{\cos x},$$

$$u'v + u\left(v' + vtgx\right) = \frac{1}{\cos x}. \qquad (3.20)$$

Подберем функцию *v=v(x)* так, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль:

$$v' + tgxv = 0.$$

Имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, решая его, получим

$$\frac{dv}{dx} + tgxv = 0,\ \ dv + tgxvdx = 0,\ \ \frac{dv}{v} + \frac{\sin x}{\cos x}dx = 0,\ \ \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{\sin x}{\cos x}dx,$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{d(\cos x)}{\cos x},\ \ \ln|v| = \ln|\cos x|,\ \ v = \cos x.$$

Подставим $v = \cos x$ в уравнение (3.20) и найдем его общее решение:

$$u'\cos x = \frac{1}{\cos x},\ \ \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},\ \ du = \frac{1}{\cos^2 x}dx,\ \ ,u = tgx + C.$$

Составим искомую функцию y:

$$y = uv = \left(tgx + C\right)\cos x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + C\right)\cos x = \sin x + C\cos x.$$

Таким образом, $y = \sin x + C\cos x$ – общее решение.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' - y = xy^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Имеем уравнение Бернулли. Положив $y = uv,\ \ y' = u'v + uv'$, получим

$$u'v + uv' - uv = x\left(uv\right)^2,$$

$$u'v + u\left(v' - v\right) = xu^2v^2. \qquad (3.21)$$

Подберем функцию *v=v(x)* так, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль:

$$v' - v = 0.$$

Имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, решая его, получим

$$\frac{dv}{dx} - v = 0,\ \ dv - vdx = 0,\ \ \frac{dv}{v} = dx,\ \ \int\frac{dv}{v} = \int dx,\ \ \ln|v| = x,\ \ v = e^x.$$

Подставим $v = e^x$ в уравнение (3.21) и найдем его общее решение:

$$u'e^x = xu^2e^{2x},\ \ \frac{du}{dx} = xu^2e^x,\ \ du = xu^2e^xdx,\ \ ,\frac{du}{u^2} = xe^xdx,$$

$$\int u^{-2}du = \int xe^xdx + C,\ \ -u^{-1} = xe^x - e^x + C,\ \ \frac{1}{u} = -xe^x + e^x - C,$$

$$u = \frac{1}{e^x - xe^x - C}.$$

Составим искомую функцию y:

$$y = uv = \frac{1}{e^x - xe^x - C} \cdot e^x = \frac{e^x}{e^x - xe^x - C}.$$

Таким образом, $y = \dfrac{e^x}{e^x - xe^x - C}$ – общее решение. Воспользуемся начальным условием и найдем частное решение.

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{e^0}{e^0 - 0 - C}, \quad \frac{1}{1 - C} = 1 \Rightarrow C = 0,$$

$$y = \frac{e^x}{e^x - xe^x - 0} = \frac{e^x}{e^x - xe^x} = \frac{1}{1 - x} \text{ или } y = \frac{1}{1 - x}.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.1 $xy' - 2y = 2x^4$.

1.2 $y' - \dfrac{y}{x} = 8x^4 + 7x - 5$.

1.3 $y' + \dfrac{4y}{x} = \cos x^5$.

1.4 $y' - 2xy = \dfrac{e^{x^2}}{x^2 - 2x + 5}$.

1.5 $y' - \dfrac{2xy}{x^2 + 1} = 6xy^3$.

1.6 $y' - y = 2xy^2$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

2.1 $y' + y = 2x, \quad y(0) = 1$.

2.2 $xy' - 3y = x^5, \quad y(0) = 2$.

2.3 $y' + 2y = e^x, \quad y(0) = 1$.

2.4 $y' = y + 3y^2, \quad y(0) = -1/3$.

2.5 $y' + y = e^{2x}y^2, \quad y(0) = -0{,}5$.

2.6 $y' + \dfrac{y}{x + 1} = -y^2, \quad y(0) = 1$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.1 $y' + 2y = e^{3x}$.

1.2 $xy' - y = x^2 \cos x$.

1.3 $xy' - y = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2 - 2}}$.

1.4 $y' + \dfrac{y}{x} = -xe^{-x^2}$.

1.5 $xy' + y = xy^5$.

1.6 $xy' + y = y^2 \ln x$.

1.7 $y' - \dfrac{y}{x - 8} = \dfrac{1}{(x - 8)^3}$.

1.8 $xy' + 3y = x^2$.

1.9 $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x \cos x}{\sin^3 x}$.

1.10 $xy' - y = y^2 \cos x$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

2.1 $y' - y = y^3, \quad y(0) = 2$.

2.2 $y' - y = 2y^2, \quad y(0) = 1$

2.3 $y' + y = x, \quad y(0) = 3$.

2.4 $y' - \dfrac{y}{x} = y^2 \cos x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

2.5 $y' - \dfrac{y}{x} y = x + 3, \quad y(0) = 1$.

2.6 $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 + 3x, \quad y(0) = 1$.

2.7 $y' - ytgx = y^4 \cos x, \quad y(0) = 1/3$

2.8 $y' - yctgx = \sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 5$.

2.9 $y' - \dfrac{y}{x} = 2x^2 - x + 1, \quad y(1) = 0$.

2.10 $xy' - 6y = x^5, \quad y(1) = 2$.

3.5 Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижения порядка

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются дифференциальными уравнениями высшего порядка. Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков, допускающие понижение порядка.

I. Простейшее дифференциальное уравнение порядка *n* имеет вид

$$y^{(n)}=f(x), \tag{3.22}$$

где $f(x)$ – известная функция.

Общее решение такого уравнения находят n-кратным последовательным интегрированием функции $f(x)$, причем при каждом интегрировании добавляется аддитивная постоянная.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y''' = \dfrac{4}{(x-5)^3} + 27\sin 3x$.

Решение. Последовательно проинтегрируем данное уравнение три раза.

$$y'' = \int\left(\frac{4}{(x-5)^3} + 27\sin 3x\right)dx + C_1 = 4\int (x-5)^{-3}dx + 27\int \sin 3x dx =$$

$$= 4\cdot\frac{(x-5)^{-2}}{-2} - 27\cdot\frac{1}{3}\cos 3x = -2(x-5)^{-2} - 9\cos 3x + C_1,$$

$$y' = \int\left(-2(x-5)^{-2} - 9\cos 3x + C_1\right)dx + C_2 = -2\int (x-5)^{-2}dx - 9\int \cos 3x dx + C_1\int dx +$$

$$+ C_2 = -2\cdot\frac{(x-5)^{-1}}{-1} - 9\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + C_1 x + C_2 = \frac{2}{x-5} - 3\sin 3x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int\left(\frac{2}{x-5} - 3\sin 3x + C_1 x + C_2\right)dx + C_3 = 2\int\frac{dx}{x-5} - 3\int\sin 3x dx + C_1\int x dx +$$

$$+ C_2\int dx + C_3 = 2\ln|x-5| + \cos 3x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$y = 2\ln|x-5| + \cos 3x + \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$ – общее решение.

II. Дифференциальное уравнение n-го порядка не содержит искомой функции y и ее производных до $(k\text{-}1)$-го порядка включительно:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)})=0 \qquad (3.23)$$

Понизить порядок такого дифференциального уравнения можно путем введения новой неизвестной функции

$$y^{(k)}=z.$$

Тогда

$$y^{(k+1)}=z', y^{(k+2)}=z'', \ldots, y^{(n)}=z^{(n-k)}.$$

После подстановки в (3.23) получим дифференциальное уравнение $(n\text{-}k)$-го порядка относительно функции $z=z(x)$:

$$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)})=0.$$

Предположим, что для полученного уравнения найдено общее решение $z=g(x, C_1, C_2, \ldots, C_{(n-k)})$. Тогда искомую функцию $y=y(x)$ можно получить путем k-кратного интегрирования функции $g(x,C_1,C_2,\ldots,C_{(n-k)})$.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''x\ln x = y'$ при начальных условиях $y(e)=4$, $y'(e)=1$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка, второго типа. Введем замену $y'=z$, тогда $y''=z'$. Получим:

$$z'x\ln x = z \ –$$

дифференциальное уравнение первого с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение.

$$z'x\ln x = z, \quad x\ln x\frac{dz}{dx} = z, \quad x\ln x dz = z dx \Big| : x\ln x z \neq 0, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x\ln x},$$

$$\int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x\ln x}, \quad \int\frac{dz}{z} = \int\frac{d(\ln x)}{\ln x}, \quad \ln|z| = \ln|\ln x| + \ln C_1, \quad \ln|z| = \ln|C_1 \ln x|, \quad z = C_1\ln x.$$

Возвращаясь к исходной функции y, приходим к уравнению

$$y' = C_1\ln x.$$

Воспользуемся начальным условием $y'(e)=1$, получим: $1=C_1\ln e \Rightarrow C_1=1$. Тогда уравнение примет вид $y' = \ln x$; найдем его общее решение путем однократного интегрирования:

$$y = \int\ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right] = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln - x + C_2$$

или

$$y = x\ln - x + C_2 .$$

Из начального условия $y(e)=4$ получим: $4=e\ln e-e+C_2 \Rightarrow C_2=4$. Тогда искомое частное решение

$$y = x\ln - x + 4 .$$

III. Дифференциальное уравнение не содержит явно независимую переменную x:

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0. \tag{3.24}$$

Порядок данного уравнения можно понизить на единицу, если положить

$$y'=p,$$

причем $p=p(y)$, а за новую переменную временно принять y. В этом случае производные y'', y''', … находят по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y'' = p\frac{dp}{dy},\ \ y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}, \ldots$$

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $2yy'' = 1 + y'^2$ при начальных условиях $y(1) = 2,\ \ y'(1) = 1$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка, третьего типа. Введем замену $y' = p$, тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Получим:

$$2yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2 -$$

дифференциальное уравнение первого с разделяющимися переменными. Найдем его общий интеграл.

$$2yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2,\ \ 2ypdp = \left(1 + p^2\right)dy\Big|: y\left(1 + p^2\right) \neq 0,\ \ \frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y},$$

$$\int\frac{2pdp}{1+p^2} = \int\frac{dy}{y},\ \ \int\frac{d(1+p^2)}{1+p^2} = \ln|y| + \ln C_1,\ \ \ln\left|1+p^2\right| = \ln|C_1y|,\ \ 1 + p^2 = C_1y.$$

Возвращаясь к исходной функции y, приходим к уравнению

$$1 + y'^2 = C_1y .$$

Воспользуемся начальными условиями $y(1) = 2,\ \ y'(1) = 1$, получим: $1+1=2C_1 \Rightarrow C_1=1$. Тогда уравнение примет вид:

$$1 + y'^2 = y \ \text{ или } \ y' = \sqrt{y-1} \ -$$

дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, найдем его общее решение.

$$y' = \sqrt{y-1},\ \ \frac{dy}{dx} = \sqrt{y-1},\ \ dy = \sqrt{y-1}dx\Big|: \sqrt{y-1} \neq 0,\ \ \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int dx,\ \int (y-1)^{-\frac{1}{2}} d(y-1) = x + C_2,\ \frac{(y-1)^{\frac{1}{2}}}{1/2} = x + C_2,\ 2\sqrt{y-1} = x + C_2.$$

Воспользуемся начальным условием $y(1)=2$, получим: $2\sqrt{2-1} = 1 + C_2 \Rightarrow$ $C_2=1$. Тогда искомое частное решение

$$2\sqrt{y-1} = x+1 \text{ или } y = \frac{(x+1)^2}{4} + 1.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.1 $y^{IV} = 6\cos 2x + 1$.

1.2 $y'' = \dfrac{6\sin x}{\cos^3 x}$.

1.3 $y'' - 4y' = 2x$.

1.4 $x^2 y'' = y'^2$.

1.5 $y'' = 2yy'$.

1.6 $yy'' = y''^2$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

2.1 $y''' = \dfrac{1}{x^2}, y(1) = 6, y'(1) = 4, y''(1) = 3$.

2.2 $y'' = 9\cos x \sin^2 x, y(0) = 1, y'(0) = 0$.

2.3 $xy'' - y' = x^2, y(1) = 1/3, y'(1) = 0$.

2.4 $(1 + x^2)y'' = 2xy', y(0) = 2, y'(0) = 1$.

2.5 $yy'' = 2y'^2 = 5yy', y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{5}{3}$.

2.6 $2\sqrt{y}y'' = y', y(1) = 0.y'(1) = 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.1 $y''' = 6\sqrt{x} + 25e^{5x}$.

1.2 $y''' = 16\cos 2x + 6x$.

1.3 $y'' = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} + 8x^3 - 1$

1.4 $y''' = \dfrac{24}{x^5} + 8\sin 2x$.

1.5 $y^{IV} = 1 - 6x - x^2$.

1.6 $y''' = 125\cos 5x + 4e^x$.

1.7 $y^{IV} = \dfrac{1}{x^6} - 6x$

1.8 $y''' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 8e^{2x}$.

1.9 $y'' = \sqrt[3]{x} + 4^x$

1.10 $y'' = x - \sqrt[5]{x} + 1$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

2.1 $y''(y-1) = 2y'^2, y(-1) = 2, y'(-1) = 1$.

2.2 $xy'' - 2y' = x, y(0) = 1, y'(0) = 1$.

2.3 $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1), y(2) = 1, y'(2) = -1$.

2.4 $y''(x-1) = y', y(2) = 1, y'(2) = -1$.

2.5 $y'' + y'tgx = tgx, y(0) = 1, y'(0) = 1$.

2.6 $y'' = 5y'^2, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

2.7 $2yy'' = y'^2 + 4, y(0) = 9, y'(0) = 5$.
2.8 $xy'' + y' = x^3, y(1) = 1, y'(1) = 0$.
2.9 $2y'' = 3y^2, y(2) = 1, y'(2) = 1$.
2.10 $2y^2 y'' = y + 9, y(0) = 3, y'(0) = 2$.

3.6 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.25}$$

где a, b, c – постоянные числа, причем $a \neq 0$, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами***.

Для нахождения общего решения важную роль играет понятие линейной зависимости и линейной независимости функций.

Функции $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ называются ***линейно зависимыми*** в интервале $(a;b)$, если существуют числа $\alpha, \beta \in R$, не равные нулю одновременно, такие, что тождество

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \tag{3.26}$$

выполняется для всех значений $x \in (a;b)$.

Если же тождество (3.26) выполняется только при условии $\alpha=\beta=0$, то $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ называются ***линейно независимыми*** в интервале $(a;b)$.

Фундаментальной системой решений дифференциального уравнения (3.25) в интервале $(a;b)$ называется совокупность любых двух линейно независимых частных решений $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ в этом интервале.

Теорема 3.2 (структура общего решения ЛОДУ второго порядка). Если $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ – любая фундаментальная система решений ЛОДУ (3.25), то общим решением этого уравнения является функция

$$y=C_1y_1+C_2y_2, \tag{3.27}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Таким образом, для нахождения общего решения ЛОДУ (3.25) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему решений.

Будем искать частные решения уравнения (3.25) в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – некоторое число (предложено Л. Эйлером). Дифференцируя эту функцию два раза и подставляя выражения для y, y', y'' в ЛОДУ (3.25), получим

$$a\underbrace{\lambda^2 e^{\lambda x}}_{y''} + b\underbrace{\lambda e^{\lambda x}}_{y'} + c\underbrace{e^{\lambda x}}_{y} = 0 \Big| : e^{\lambda x},$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{3.28}$$

Уравнение (3.28) называют ***характеристическим уравнением*** ЛОДУ (3.25). Для составления характеристического уравнения достаточно в уравнении (3.25) заменить y'', y', y на $\lambda^2, \lambda,\ 1$ соответственно.

При решении характеристического уравнения (3.28) возможны следующие случаи.

I. Дискриминант *D>0*. Следовательно, характеристическое уравнение (3.28) имеет два действительных и различных корня: $\lambda_1, \lambda_2 \in R,\ \ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Тогда фундаментальной системой решений ЛОДУ (3.25) являются функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ и общее решение ЛОДУ (3.25) согласно формуле (3.27) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \qquad (3.29)$$

II. Дискриминант *D=0*. Следовательно, характеристическое уравнение (3.28) имеет два действительных и равных корня: $\lambda_1 = \lambda_2 = \tilde{\lambda} \in R$.

Тогда фундаментальной системой решений ЛОДУ (3.25) являются функции $y_1 = e^{\tilde{\lambda} x}$, $y_2 = xe^{\tilde{\lambda} x}$ и общее решение ЛОДУ (3.25) согласно формуле (3.27) имеет вид

$$y = C_1 e^{\tilde{\lambda} x} + C_2 x e^{\tilde{\lambda} x}. \qquad (3.30)$$

III. Дискриминант *D<0*. Следовательно, характеристическое уравнение (3.28) имеет два комплексно-сопряженных корня: $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\alpha, \beta \in R,\ \ \beta > 0$.

Тогда фундаментальной системой решений ЛОДУ (3.25) являются функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ и общее решение ЛОДУ (3.25) согласно формуле (3.27) имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x. \qquad (3.31)$$

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - y' - 2y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 0, y'(0) = 3$.

Решение. Сначала найдем общее решение. Для этого составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0,\ D = 9 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1.$$

Тогда, согласно формуле (3.29), общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Для нахождения частного решения сначала продифференцируем полученное равенство: $y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}$, а затем воспользуемся начальными условиями:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2,$$

$$y'(0) = 3 \Rightarrow 3 = 2C_1 - C_2.$$

Заключим полученные равенства в систему и найдем значения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 - C_2 = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Тогда частное решение имеет вид

$$y = e^{2x} - e^{-x}.$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,\ D = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Согласно формуле (3.30), общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,\ D = -36 \Rightarrow \lambda_1 = 2 + 3i,\ \ \lambda_2 = 2 - 3i.$$

Согласно формуле (3.31), общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.1 $3y'' - 2y' - 8y = 0$. 1.2 $y'' + 5y' - 2y = 0$. 1.3 $y'' + 7y' = 0$.

1.4 $9y'' - 6y' + y = 0$. 1.5 $y'' + 14y' + 49y = 0$. 1.6 $y'' - 6y' + 13y = 0$.

1.7 $4y'' + 8y' + 5y = 0$. 1.8 $y'' - 7y = 0$. 1.9 $y'' + 7y = 0$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

2.1 $y'' - 7y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -4$. 2.2 $y'' + 2y' = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4$.

2.3 $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2$. 2.4 $y'' - y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = -2$.

2.5 $y'' - 4y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$. 2.6 $y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.1	а) $2y'' - 5y' = 0$;	б) $y'' + 6y' + 9y = 0$;	в) $y'' - 12y' + 37y = 0$.
1.2	а) $6y'' + 7y' - 3y = 0$;	б) $y'' - 2y' + y = 0$;	в) $y'' + 9y = 0$.
1.3	а) $9y'' + 3y' - 2y = 0$;	б) $25y'' + 10y' + y = 0$;	в) $y'' + 8y' + 25y = 0$.
1.4	а) $y'' - 2y' - 8y = 0$;	б) $y'' - 8y' + 16y = 0$;	в) $y'' - 6y' + 10y = 0$.
1.5	а) $4y'' + 8y' - 5y = 0$;	б) $4y'' + 4y' + y = 0$;	в) $16y'' + y = 0$.
1.6	а) $y'' - 5y' + 4y = 0$;	б) $49y'' + 14y' + y = 0$;	в) $y'' - 2y' + 5y = 0$.
1.7	а) $y'' + 4y' = 0$;	б) $y'' - 16y' + 64y = 0$;	в) $y'' - 2y' + 2y = 0$.
1.8	а) $y'' - 3y' - 4y = 0$;	б) $16y'' + 8y' + y = 0$;	в) $y'' + 4y' + 8y = 0$.
1.9	а) $y'' - 8y' = 0$;	б) $36y'' - 12y' + y = 0$;	в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

1.10 а) $y'' - 6y' + 8y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$; в) $25y'' + 3y = 0$.

3.7 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{3.32}$$

где *a, b, c* – постоянные числа, причем $a \neq 0$ и $f(x) \neq 0$, называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами***.

Теорема 3.3. Если $\tilde{y}$ – какое-нибудь частное решение ЛНДУ (3.32), а $y_{o.o.}$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения, то их сумма

$$y = y_{o.o.} + \tilde{y} \tag{3.33}$$

будет общим решением уравнения (3.32).

В случае если правая часть ЛНДУ (3.32), то есть функция $f(x)$ имеет специальный вид, для нахождения $\tilde{y}$ будем пользоваться следующей таблицей.

Таблица 3.1 – Определение вида частного решения по виду правой части дифференциального уравнения

Правая часть $f(x)$	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения $\tilde{y}$
$P_n(x)$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$\tilde{P}_n(x)$
	Число 0 – один из корней характеристического уравнения	$x \cdot \tilde{P}_n(x)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$\tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
	Число α – корень характеристического уравнения кратности *s*	$x^s \cdot P_n(x)e^{\alpha x}$
$P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$	Числа $\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения	$\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x$
	Числа $\pm\beta i$ – корни характеристического уравнения	$x \cdot (\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + {}$ $+ \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$

Окончание таблицы 3.1

$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x +$ $+Q_m(x)\sin\beta x)$	Числа $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения	$e^{\alpha x}\cdot(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x +$ $+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$
	Числа $\alpha \pm \beta i$ – корни характеристического уравнения	$xe^{\alpha x}\cdot(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x +$ $+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$

Замечание 1. $k = \max(n,m)$.

Замечание 2. $\widetilde{P}_0(x) = A,\ \ \widetilde{P}_1(x) = Ax + B,\ \ \widetilde{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, $\widetilde{P}_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ и т. д., где A, B, C, D, … – неизвестные пока коэффициенты, которые можно найти подстановкой $\widetilde{y}$ в ЛНДУ (3.32) и последующим приравниванием коэффициентов при одноименных функциях в левой и правой частях равенства.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 12x^2$.

Решение. Решение будем искать в виде

$$y = y_{o.o.} + \widetilde{y},$$

где $y_{o.o.}$– общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\widetilde{y}$ – частное решение неоднородного уравнения.

Найдем общее решение однородного уравнения $y'' + 2y' = 0$. Для этого составим характеристическое уравнение и решим его:

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0,\ \ \lambda(\lambda + 2) = 0,\ \ \lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = -2.$$

Общее решение ЛОДУ имеет вид

$$y_{o.o.} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

Для нахождения частного решения $\widetilde{y}$ воспользуемся таблицей 3.1. Правая часть ЛНДУ $f(x) = \underbrace{x^2}_{P_2(x)}$, число 0 является корнем характеристического уравнения, значит

$$\widetilde{y} = x \cdot \widetilde{P}_2(x) = x \cdot \left(Ax^2 + Bx + C\right)$$

или

$$\widetilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Найдем первую и вторую производную $\widetilde{y}$:

$$\widetilde{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C,\ \ \widetilde{y}'' = 6Ax + 2B,$$

и подставим их в исходное уравнение:

$$6Ax + 2B + 2\cdot\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 12x^2,$$

$$6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 2C = 12x^2,$$

$$6Ax^2 + (6A + 4B)x + (2B + 2C) = 12x^2.$$

Приравняем коэффициенты при одноименных функциях в левой и правой частях, найдем неизвестные коэффициенты:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &: \ 6A = 12, \\ x &: \ 6A + 4B = 0, \\ x^0 &: 2B + 2C = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A &= 2, \\ B &= -3, \\ C &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, частное решение запишется в виде

$$\widetilde{y} = 2x^3 - 3x^2 + 3x.$$

Окончательно получаем общее решение исходного ЛНДУ:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + 2x^3 - 3x^2 + 3x.$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' = -18\cos 3x$.

Решение. Решение будем искать в виде

$$y = y_{o.o.} + \widetilde{y},$$

где $y_{o.o.}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\widetilde{y}$ – частное решение неоднородного уравнения.

Найдем общее решение однородного уравнения $y'' - 3y' = 0$. Для этого составим характеристическое уравнение и решим его:

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0, \ \lambda(\lambda - 3) = 0, \ \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 3.$$

Общее решение ЛОДУ имеет вид

$$y_{o.o.} = C_1 + C_2 e^{3x}.$$

Для нахождения частного решения $\widetilde{y}$ воспользуемся таблицей 3.1. Правая часть ЛНДУ $f(x) = -18\cos 3x = \underbrace{-18}_{P_0(x)}\cos 3x + \underbrace{0}_{Q_0(x)} \cdot \sin 3x$, числа $\pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, значит

$$\widetilde{y} = \widetilde{P}_0(x)\cos 3x + \widetilde{Q}_0(x)\sin 3x$$

или

$$\widetilde{y} = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Найдем первую и вторую производную $\widetilde{y}$:

$$\widetilde{y}' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$

$$\widetilde{y}'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x,$$

и подставим их в исходное уравнение:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 3\cdot\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) = -18\cos 3x,$$
$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 9A\sin 3x - 9B\cos 3x = -18\cos 3x,$$
$$\cos 3x\cdot\left(-9A - 9B\right) + \sin 3x\cdot\left(9A - 9B\right) = -18\cos 3x.$$

Приравняем коэффициенты при одноименных функциях в левой и правой частях, найдем неизвестные коэффициенты:

$$\begin{array}{ll} \cos 3x: & -9A-9B=-18, \\ \sin 3x: & 9A-9B=0, \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1, \\ B=1. \end{array}\Bigg\}$$

Таким образом, частное решение запишется в виде

$$\tilde{y}=\cos 3x+\sin 3x.$$

Окончательно получаем общее решение исходного ЛНДУ:

$$y=C_1+C_2e^{3x}+\cos 3x+\sin 3x.$$

Задания для решения на практическом занятии

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.1 $5y''+y'=2x-1$.

1.2 $y''+5y'-14y=e^{5x}$.

1.3 $y''+4y=8\cos 2x$.

1.4 $y''-2y'+y=6e^{2x}\sin x$.

1.5 $y''+3y'-10y=6x^2-12x$.

1.6 $y''-3y'+2y=xe^{x}$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

2.1 $y''-4y'-5y=12e^{5x}, y(0)=8, y'(0)=0$.

2.2 $y''+6y'+9y=10\sin x, y(0)=, y'(1)=0$.

2.3 $y''+2y'=6x^2+2x+1, y(0)=2, y'(0)=2$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.1 $y''-4y=8e^{2x}$.

1.2 $y''+5y'+6y=52\sin x$.

1.3 $y''+2y'=6x^2+2x+1$.

1.4 $y''-3y'+2y=-\sin x-7\cos x$.

1.5 $y''-12y'+36y=36x^3-9$.

1.6 $y''+9y=x\sin x$.

1.7 $y''-5y'-6y=xe^{6x}$

1.8 $y''-9y'+18y=26\cos x-8\sin x$.

1.9 $y''+y'-12y=(16x+22)e^{4x}$

1.10 $y''-10y'+25y=e^{5x}$.

4 ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

4.1 Сходимость и сумма числового ряда. Свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости

Числовым рядом называется бесконечная сумма вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

где $u_1, u_2, ...$ – действительные или комплексные числа. Слагаемые $u_1, u_2, ...$ называются ***членами ряда***, а u_n – ***общим членом ряда***.

Ряд считается заданным, если известен общий член u_n, выраженный как функция его номера *n*: $u_n = f(n)$.

Сумма *n* первых членов ряда называется ***n-ой частичной суммой ряда*** и обозначается S_n, то есть

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n.$$

Частичные суммы $S_1, S_2, ..., S_n$ образуют числовую последовательность. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$, то этот предел называют ***суммой ряда,*** и говорят, что ***ряд сходится***. Записывают

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Если же $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \infty$, то ряд называют ***расходящимся***. Такой ряд суммы не имеет.

Пример 1. Исследовать на сходимость ***гармонический ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Решение. Поскольку для $\forall x \in (0; +\infty)$ справедливо неравенство $\ln(1+x) < x$, то

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} > \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + ... + \ln\frac{n+1}{n} == \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot ... \cdot \frac{n+1}{n}\right) =$$
$$= \ln(n+1) \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty.$$

Таким образом, ***гармонический ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ***расходится***.

Свойства числовых рядов

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Cu_n$, где $C - const$, также сходится и его сумма равна CS.

2. Если сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$, причем их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (u_n \pm v_n)$ и их суммы равны $S_1 \pm S_2$.

3. Если у ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ отбросить или прибавить конечное число членов, то полученный и исходный ряды сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Из свойства 2 следует, что:

а) сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд;

б) сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

При исследовании на сходимость рядов часто используется ***ряд геометрической прогрессии:***

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1},$$

где a и $q -$ действительные, отличные от нуля числа.

Ряд геометрической прогрессии ***расходится при*** $|q| \geq 1$ ***и сходится при*** $|q| < 1$, причем его сумма в этом случае равна $\dfrac{a}{1-q}$.

Пример 2. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 + n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5 \cdot 9^n + 2^n}{18^n}$.

Решение. а) В данном случае общий член ряда $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n} = \dfrac{1}{n(n+1)}$ представляет собой правильную рациональную дробь, которую разложим на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} \Rightarrow$$

$$1 = A(n+1) + Bn,$$

$$\left.\begin{array}{l} n = -1: \ \ 1 = -B, \\ n = 0: \quad 1 = A, \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B = -1, \\ A = 1. \end{array}\right\}$$

Таким образом,

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

или

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{u_1} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{u_2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{u_n} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1,$$

то есть ряд сходится, и его сумма $S = 1$.

б) Общий член ряда $u_n = \dfrac{5 \cdot 9^n + 2^n}{18^n}$ представим в виде:

$$\frac{5 \cdot 9^n + 2^n}{18^n} = \frac{5 \cdot 9^n}{18^n} + \frac{2^n}{18^n} = 5 \cdot \left(\frac{9}{18}\right)^n + \left(\frac{2}{18}\right)^n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{5}{2^n} + \frac{1}{9^n}.$$

Рассмотрим два ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{2^n}. \text{ и } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9^n}.$$

Оба ряда – ряды геометрической прогрессии, причем для первого $a = 5/2$, $q = 1/2$, а для второго $a = 1/9$, $q = 1/9$. Поскольку для обоих рядов $|q| < 1$, то эти ряды сходятся, причем их суммы равны соответственно

$$S_1 = \frac{5/2}{1 - 1/2} = \frac{5/2}{1/2} = 5, \ S_2 = \frac{1/9}{1 - 1/9} = \frac{1/9}{8/9} = \frac{1}{8}.$$

Тогда, согласно свойству 2 числовых рядов, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{5}{2^n} + \dfrac{1}{9^n}\right)$ тоже сходится, и его сумма S равна $S_1 + S_2$, то есть $S = 5 + 1/8 = 41/8$.

Теорема 4.1 (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \tag{4.1}$$

сходится, то

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0, \tag{4.2}$$

то есть его общий член стремится к нулю.

Следствие (достаточное условие расходимости ряда). Если $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд (4.1) расходится.

Заметим, что теорема 4.1 не позволяет определять сходимость рядов: из условия (4.2) не следует, что ряд (4.1) сходится. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых выполняется условие (4.2). Одним из примеров такого расходящегося ряда, общий член которого стремится к нулю, является гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$, расходимость которого установлена в примере 1.

Пример 3. Исследовать на сходимость числовые ряды: а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n^2 + 5n - 1}{n^2 + 3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{3n - 1}{3n + 2}\right)^{5n-2}$.

Решение. Найдем предел общего члена ряда.

а) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2+5n-1}{n^2+3} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]^{:n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} = \frac{2+\frac{5}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}}{1+\frac{3}{+\infty}} =$

$= \frac{2+0-0}{1+0} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится согласно достаточному условию расходимости.

б) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{5n-2} = \left[1^{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3n-1}{3n+2}-1\right)^{5n-2} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3n-1-3n-2}{3n+2}\right)^{5n-2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{-3}{3n+2}\right)^{5n-2} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{3n+2}{-3}}\right)^{\frac{3n+2}{-3}\cdot\frac{-3}{3n+2}\cdot(5n-2)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3(5n-2)}{3n+2}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-15n+6}{3n+2}} =$

$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-15+\frac{6}{n}}{3+\frac{2}{n}}} = e^{\frac{-15+0}{3+0}} = e^{-\frac{15}{3}} = e^{-5} = \frac{1}{e^5} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится согласно достаточному условию расходимости.

Заметим, что при вычислении предела для раскрытия неопределенности $[1^{\infty}]$ воспользовались вторым замечательным пределом: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Задания для решения на практическом занятии

1. Доказать сходимость числового ряда и найти его сумму.

1.1 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4-2^n}{10^n}$. 1.2 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{(6n-1)(6n+5)}$. 1.3 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+7n+12}$. 1.4 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+2}}{6^n}$.

2. Исследовать на сходимость числовой ряд.

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}7^n$. 2.2 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{6n-5}{n+1}$. 2.3 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+4n-2}{3n+1}$. 2.4 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^3+7n-5}{5n^3-n^2+1}$.

2.5 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+5}{n+2}\right)^{4n}$. 2.6 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5n-3}{5n+2}\right)^{2n-1}$. 2.7 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n-1}{n+1}\right)^{2n+5}$. 2.8 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}+1}\right)^{n}$.

2.9 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{7n-2}{\sqrt[3]{n+3}}$. 2.10 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^3+5}}{2n^2-1}$. 2.11 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+4}{\sqrt[3]{n}+1}$. 2.12 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}+1}\right)^{n}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму.

1.1 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3\cdot 4^n-2^n}{8^n}$.

1.2 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{(2n+7)(2n+9)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5\cdot 3^n+7\cdot 6^n}{36^n}$.

1.3 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3}{(3n+1)(3n+4)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^{2n}-4\cdot 3^n}{27^n}$.

1.4 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{8^{n+1}-3\cdot 2^n}{32^n}$.

1.5 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{7\cdot 4^n-2^{n-1}}{8^n}$.

1.6 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+7)(n+8)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{10^n+5^{n+2}}{25^n}$.

1.7 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{31}{(3n-2)(3n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^{2n+1}-2^n}{8^n}$.

1.8 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4}{(4n-3)(4n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3\cdot 7^n+2^n}{21^n}$.

1.9 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n+2)(3n+5)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{10^n-2^{2n+3}}{20^n}$.

1.10 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(5n-3)(5n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^{n+2}-2\cdot 5^n}{6^n}$.

2. Исследовать на сходимость числовые ряды.

2.1 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2+4n-1}{5n^2+9}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+8}\right)^{2n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{4n^2}{n^2+n+3}\right)^{n+6}$.

2.2 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{7n^2+n-6}{8n+9}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n+5}\right)^{3n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{5n+2}{3n-1}\right)^{4n+1}$.

2.3 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5n^3+4n^2-3}{n^2+n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{9n-4}{9n+5}\right)^{7n+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{9n^2+n+1}{8n^2+3}\right)^{n^3}$.

2.4 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{6n^3+n^2-5}{5n^3+n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{3n+8}{3n-1}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{3n^3+6}{n^2+3}\right)^{n+4}$.

2.5 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4n^2-1}{n^2+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n+8}{n+2}\right)^{5n-3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{7n-2}{n+5}\right)^{n^2}$.

2.6 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4+4n^3-3}{n^2+5n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5n+7}{5n}\right)^{3n+9}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8n^2+n-3}{5n^2-n+7}\right)^{4n-1}$.

2.7 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^5+n+6}{n^5+9n^2-3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{7n+1}{7n+8}\right)^{n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n^3-2}{n^2+2n+3}\right)^{n+9}$.

2.8 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{5n^2+n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8n-3}{8n+9}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{10n-3}{n+4}\right)^{n^2+6}$.

2.9 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3+6n-5}{n^3+n^2+9}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4n-3}{4n+7}\right)^{3n-2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5n^2+4n-3}{4n^2+5n+3}\right)^{3n-1}$.

2.10 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{6n^5+n-4}{n^3+n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+10}{n+2}\right)^{5n-4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9n^3-5}{8n^2+11}\right)^{n+6}$.

4.2 Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n,\ u_n>0\ \ \forall n\in N \tag{4.3}$$

Теорема 4.2 (признак Даламбера). Если для ряда (4.3) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=r$,

то при

$r<1$ – ряд сходится,

$r>1$ – ряд расходится,

$r=1$ – вопрос о сходимости не решён (надо применять другой признак).

В примерах часто применяется обозначение $n!$ (! – факториал):

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

Например,

$$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24,$$

$$(n+1)!=\underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}_{n!}\cdot(n+1)=n!\cdot(n+1),$$

$$(2n+2)!=\underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n)}_{(2n)!}\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)=(2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2).$$

Пример 1. Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\cdot\sin\frac{\pi}{3^n}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера.

а) $u_n = \dfrac{2n+1}{n!} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)+1}{(n+1)!} = \dfrac{2n+2+1}{(n+1)!} = \dfrac{2n+3}{n!(n+1)}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{n!(n+1)} : \frac{2n+1}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+3)\cdot n!}{n!(n+1)\cdot(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{(n+1)\cdot(2n+1)} == \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{2n^2+3n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{:n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{2+\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}} = \frac{0+0}{2+0+0} = \frac{0}{2} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

б) $u_n = n\cdot\sin\dfrac{\pi}{3^n} \Rightarrow u_{n+1} = (n+1)\cdot\sin\dfrac{\pi}{3^{n+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\cdot\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{n\cdot\sin\frac{\pi}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{3^n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}\Big/\frac{\pi}{3^{n+1}}\right)\cdot\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\left(\sin\frac{\pi}{3^n}\Big/\frac{\pi}{3^n}\right)\cdot\frac{\pi}{3^n}} = 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}\Big/\frac{\pi}{3^{n+1}}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{\pi}{3^n}\Big/\frac{\pi}{3^n}\right)} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$$

ряд сходится.

Теорема 4.3 (радикальный признак Коши). Если для ряда (4.3) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = r$, то при

$r < 1$ – ряд сходится,
$r > 1$ – ряд расходится,
$r = 1$ – вопрос о сходимости не решён (надо применять другой признак).

Радикальный признак Коши удобно применять в случае, если, например,

$$u_n = (\ldots)^n, (\ldots)^{5n}, (\ldots)^{2n+3}, (\ldots)^{n^2} \text{ и т. д.}$$

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{5n^2+2n+1}{7n^2-2}\right)^n$.

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши.

$$u_n = \left(\frac{5n^2+2n+1}{7n^2-2}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+2n+1}{7n^2-2}\right)^n} = \frac{5n^2+2n+1}{7n^2-2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^2+2n+1}{7n^2-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{5+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{7-\frac{2}{n^2}}=\frac{5+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{7-\frac{2}{\infty}}=\frac{5+0+0}{7-0}=$$

$=\dfrac{5}{7}<1\Rightarrow$ ряд сходится.

Теорема 4.4 (интегральный признак Коши). Если члены ряда (4.3) можно представить как числовые значения некоторой непрерывной и монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$ функции $f(x)$ так, что $f(n)=u_n$, то

1) если несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$;

2) если несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$.

Пример 3. Исследовать на сходимость ***обобщённый гармонический ряд (ряд Дирихле)*** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p},\quad p>0.$

Решение. Воспользуемся интегральным признаком Коши. Поскольку $u_n=\dfrac{1}{n^p}$, то введем в рассмотрение функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^p}\,(p>0)$, которая является непрерывной и монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$ и $f(n)=\dfrac{1}{n^p}=u_n$. При $p\neq 1$ имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}=\left[\begin{array}{l} p>1\Rightarrow 1-p<0\Rightarrow b^{1-p}\underset{b\to+\infty}{\to}0 \\ p>1\Rightarrow 1-p>0\Rightarrow b^{1-p}\underset{b\to+\infty}{\to}+\infty\end{array}\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1\\ +\infty, & p<1\end{cases}.$$

Заметим, что при $p=1$ получим ***гармонический ряд,*** который ***расходится*** (см. п. 4.1 пример 1).

Таким образом, **обобщённый гармонический ряд (ряд Дирихле)**

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p},\quad p>0$$

расходится при $0<p\leq 1$ **и сходится при** $p>1$.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln(2n+3)(2n+3)}$.

Решение. Воспользуемся интегральным признаком Коши. Поскольку $u_n=\frac{1}{\ln(2n+3)(2n+3)}$, то введем в рассмотрение функцию $f(x)=\frac{1}{\ln(2x+3)(2x+3)}$, которая является непрерывной и монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$. Находим

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\ln(2x+3)(2x+3)}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{\ln(2x+3)}\cdot\frac{1}{2x+3}dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2x+3}dx=\frac{1}{2}d\big(\ln(2x+3)\big)\right]=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{\ln(2x+3)}\cdot d\big(\ln(2x+3)\big)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln\big(\ln(2x+3)\big)\Big|_1^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\big[\ln\big(\ln(2b+3)\big)-\ln\big(\ln 5\big)\big]=+\infty\Rightarrow$$

несобственный интеграл расходится, а, значит, расходится и исследуемый ряд.

Пусть даны два числовых ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n,\ u_n>0\ \ \forall n\in N \tag{4.4}$$

и

$$\sum_{n=1}^{+\infty}v_n,\ \ v_n>0\ \forall n\in N. \tag{4.5}$$

Теорема 4.5 (признак сравнения). Пусть каждый член ряда (4.4) не превосходит соответствующего члена ряда (4.5), то есть $u_n\le v_n$ $n=1,2,3,\ldots$. Тогда:

а) если ряд (4.5) сходится, то и ряд (4.4) сходится, то есть из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами;

б) если ряд (4.4) расходится, то и ряд (4.5) расходится, то есть из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами.

Этот признак остается в силе, если неравенства $u_n\le v_n$ выполняются не для всех *n*, а начиная с некоторого номера $n\in N$.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n}{2n^5+3}$.

Решение. Поскольку для $\forall n \in N$ справедливо неравенство $\dfrac{\cos n}{2n^5+3} < \dfrac{1}{n^5}$, причем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^5}$ – сходящийся ряд Дирихле (p=5>1), то, согласно признаку сравнения, исходный ряд тоже сходится.

Теорема 4.6 (предельный признак сравнения). Если существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A,\ 0 < A < +\infty$, то ряды с положительными членами (4.4) и (4.5) сходятся или расходятся одновременно.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{7n+3}{4n^3+n^2-2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} tg\,\dfrac{\pi}{6n}$.

Решение. Применим предельный признак сравнения.

а) Для исследуемого ряда подберём подходящий ряд Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3-1}} =.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

который сходится, поскольку $p = 2 > 1$.

В нашем случае $u_n = \dfrac{7n+3}{4n^3+n^2-2}, v_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Найдем предел:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7n+3}{4n^3+n^2-2} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(7n+3)\cdot n^2}{4n^3+n^2-2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7n^3+3n^2}{4n^3+n^2-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{:n^3} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{7+\frac{3}{n}}{4+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}} = \frac{7+\frac{3}{\infty}}{4+\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}} = \frac{7+0}{4+0-0} = \frac{4}{7} = A,\ 0 < A < +\infty \Rightarrow$$ исходный ряд тоже сходится.

б) Исходный ряд сравним с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$.

Так как

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{tg\frac{\pi}{6n}}{\frac{1}{n}} = \left[tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6n}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{6n}}{\frac{1}{n}} =$$

$$=1\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{6n}}{\dfrac{\pi}{6n}\cdot\dfrac{6}{\pi}}=\frac{\pi}{6}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{6n}}{\dfrac{\pi}{6n}}=\left[\frac{\sin\alpha}{\alpha}\underset{\alpha\to0}{\to}1\right]=\frac{\pi}{6}\cdot1=\frac{\pi}{6}=A,\ \ 0<A<+\infty\Rightarrow$$

исходный ряд тоже расходится.

Задания для решения на практическом занятии

1. Исследовать на сходимость числовые ряды.

1.1 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+2)!}{n^2}$. 1.2 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)\cdot 7^{n+1}}{(2n)!}$. 1.3 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5n-1}{n^2+4n+3}$.

1.4 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{6n^5-n^2+9}$. 1.5 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{2n-1}}{n^3+5}$. 1.6 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+5n+2}}$.

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2/n)}{n^2}$. 1.8 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{4^n}$. 1.9 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5n^2-2n+1}{n^2+5n-1}\right)^{2n+3}$.

1.10 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4n-1}{4n+3}\right)^{n^2}$. 1.11 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{7n-1}{n^2+8}\right)^{5n-1}$. 1.12 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln(\ln(n+1))\ln(n+1)(n+1)}$.

1.13 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln^3(5n-1)}{5n-1}$. 1.14 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{\ln(n+1)}\cdot(n+1)}$. 1.15 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(5n-2)\sin\frac{1}{4^{n+1}}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Исследовать на сходимость числовые ряды.

1.1 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(n+3)}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{6}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^2+3}{5n^2-3}\right)^{4n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln^3(6n+5)(6n+5)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{7n^3+n^2+4}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{8n^2+n+2}{n^3+3n+1}$.

1.2 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+5)!}{3n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\frac{\pi}{5n^2}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9n^2+2}{4n^2-1}\right)^{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln(2n+9)}(2n+9)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{5n-2}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{8n+1}{n^7+5n-2}$.

1.3 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-1}{5^n\cdot n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(arctg\frac{3}{4n^3}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^5-3n+7}{6n^6-5}\right)^{n+1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln(5n-4)(5n-4)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{9n^2-1}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{11n-2}{n^7+3n^5+1}$.

1.4 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!}{3^n\cdot(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{4\pi}{2^{n-1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+5n-4}{9n^3-3}\right)^{3n+2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\ln(5n+3)}(5n+3)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^3+2n-1}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{7n^3+3n-5}$.

1.5 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+2)!}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+4)\cdot tg\frac{1}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n+2}{7n-5}\right)^{n^3}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln(9n-5)(9n-5)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{6n-1}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{5n^3+3n+7}$.

1.6 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+3)^2}{(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\arcsin\frac{2\pi}{n^4}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n-1}{2n}\right)^{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln^3(4n-1)(4n-1)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{\sqrt{n^6+2n^2+3}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^7+n^3+2}{5n^9+3n-1}$.

1.7 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4^{n+3}}{5n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n^2+1)\sin\frac{1}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+3n+2}{2n^2-n+1}\right)^{5n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln^3(4n-1)(4n-1)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{2n^8+3}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4n+9}{5n^3+3n^2-1}$.

1.8 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\cdot n!}{8^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(tg\frac{10}{5^n}\right)^{7n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^3+3n^2-1}{5n^4+1}\right)^{3n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln^8(2n+5)(2n+5)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{8n^8+n^6-3}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2+3}{4n^3-n-1}$.

1.9 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2+3}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+2)\cdot tg\frac{3}{4^{n-1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^2+3}{4n^2-1}\right)^{3n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{\ln(9n+7)}(9n+7)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{5n^6+3}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^5+n^4+2}{4n^6-n+3}$.

1.10 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+5)!}{n^3\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(arctg\frac{n}{n+5}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n^2+2}{8n^2+1}\right)^{n+2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln^4(3n+1)(3n+1)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{6}{\sqrt{n^6+4}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5n+7}{n^7+3n-2}$.

4.3 Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ называется ***знакопеременным***, если он содержит бесконечное число положительных и бесконечное число отрицательных членов.

Рассмотрим числовой ряд, составленный из модулей членов исходного ряда: $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$.

Теорема 4.7 (общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов). Если для знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ сходится соответствующий ряд, составленный из модулей его членов $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$, то сходится и сам знакопеременный ряд. В этом случае знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ называется ***абсолютно сходящимся.***

Обратное утверждение неверно: если сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, то это не означает, что будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$.

Если ряд из модулей $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ называют ***условно сходящимся.***

Следует отметить, что ряд из модулей $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ содержит положительные члены, поэтому для исследования его сходимости можно применять рассмотренные ранее достаточные признаки сходимости: Даламбера, радикальный и интегральный Коши, сравнения.

Знакочередующимся рядом называют числовой ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} u_n, u_n > 0 \qquad (4.6)$$

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий достаточный признак сходимости.

Теорема 4.8 (признак Лейбница). Если для членов знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$, $u_n > 0$ выполняются следующие два условия:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$, то есть последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, то есть общий член ряда стремится к нулю, то ряд сходится, и его сумма S удовлетворяет неравенству

$$0 < S < u_1.$$

Пример 1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2+5n-1}{3n^2-n+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{4n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{5^n}{(3n-2)!}$.

Решение. а) Воспользуемся признаком Лейбница. Проверим выполнение условия 2):

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+5n-1}{3n^2-n+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{:n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{n^2}} = \frac{1+\dfrac{5}{\infty}-\dfrac{1}{\infty}}{3-\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{4}{\infty}} = \frac{1+0-0}{3-0+0} =$$

$= \dfrac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

б) Воспользуемся признаком Лейбница. Проверим выполнение условий 1) – 2):

1) $u_1 = \dfrac{1}{3} > u_2 = \dfrac{1}{7} > u_3 = \dfrac{1}{11} > \ldots > u_n = \dfrac{1}{4n-1} > \ldots$ – выполняется;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{4n-1} = \dfrac{1}{\infty} = 0$ – выполняется.

Поскольку выполняются оба условия признака Лейбница, то ряд сходится. Исследуем на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n-1}$$

и к нему применим предельный признак сравнения. Сравним этот ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n-1}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{4n-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{:n}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4-\frac{1}{n}}=\frac{1}{4-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{4-0}=\frac{1}{4},$$

$0<\frac{1}{4}<+\infty\Rightarrow$ ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n-1}$ тоже расходится.

Таким образом, исходный знакочередующийся ряд сходится условно.

в) Составим ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n}{(3n-2)!}$$

и к нему применим признак Даламбера.

$$u_n=\frac{5^n}{(3n-2)!}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(3(n+1)-2)!}=\frac{5^n\cdot 5}{(3n+3-2)!}=\frac{5^n\cdot 5}{(3n+1)!},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5^n\cdot 5}{(3n+1)!}:\frac{5^n}{(3n-2)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5^n\cdot 5\cdot(3n-2)!}{(3n+1)!\cdot 5^n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{5\cdot(3n-2)!}{(3n-2)!\cdot(3n-1)\cdot(3n)\cdot(3n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{(3n-1)\cdot(3n)\cdot(3n+1)}=\frac{5}{\infty}=0<1\Rightarrow$$

ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n}{(3n-2)!}$ сходится, а, значит, сам знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Задания для решения на практическом занятии

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды.

1.1 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{5^n}$. 1.2 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{n+1}}{(2n)!}$. 1.3 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+5}{6n-1}$.

1.4 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{9n-5}}$. 1.5 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{(2n-1)!}$. 1.6 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{4n^3-1}$.

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n+1}{5n-4}\right)^n$. 1.8 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{n^2+5n}$. 1.9 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{7n+2}}$.

1.10 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+2}$. 1.11 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^3+n-1}{n^2+4}$. 1.12 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{(3n+1)!}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды.

1.1 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3^{n+2}}$. 1.2 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{4n-1}{n!}$. 1.3 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n^3+n-3}{7n^2+5n+1}$.

1.4 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{8n^2+1}}$. 1.5 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n^3+2}{6n^3-1}\right)^{n^2-n}$. 1.6 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{5n^4+n-2}{n^6+4n^3+1}$.

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{6n-5}{n+4}\right)^{n}$. 1.8 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n-1}{n+4}\right)^{n^2+n}$. 1.9 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+7}{\sqrt{n+9}}$.

1.10 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{7^n\cdot n!}$.

4.4 Функциональные ряды. Область сходимости

Пусть функции $u_n(x), n\in N$ определены в области *D*. Тогда ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x), x\in D \tag{4.7}$$

называется ***функциональным рядом***.

При фиксированном значении $x_0\in D$ функциональный ряд (4.7) становится числовым и может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если для $x_0\in D$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ сходится, то говорят, что функциональный ряд (4.7) сходится в точке x_0, и точку x_0 называют ***точкой сходимости***.

Если функциональный ряд (4.7) сходится в каждой точке $x\in E\subset D$, то этот ряд называется сходящимся на множестве *E*, а множество *E* называется ***областью сходимости*** ряда.

Для функционального ряда (4.7) составим соответствующий ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|u_n(x)\right|. \tag{4.8}$$

Если ряд (4.8) сходится при $x\in E_1\subset D$, то ряд (4.7) называется ***абсолютно сходящимся*** на множестве E_1.

Таким образом, для нахождения области сходимости функционального ряда (4.7) можно составить ряд из модулей (4.8) и воспользоваться признаками сходимости числовых рядов. Например, при использовании признаков Даламбера или радикального Коши сходимости рядов нужно:

1) найти $\varphi(x)$ по одной из формул

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \varphi(x)$$

или

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \varphi(x);$$

2) решив неравенство $\varphi(x) < 1$, получить ***интервал сходимости***, то есть множество всех значений переменной x, при которых ряд (4.7) сходится абсолютно (соответственно, на множестве решений неравенства $\varphi(x) > 1$ ряд расходится);

3) исследовать сходимость функционального ряда (4.7) в граничных точках интервала сходимости. Пусть для определённости этими точками являются числа x_i. Для каждого значения x_i составить числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_i)$ и исследовать его на абсолютную или условную сходимость;

4) объединить интервал сходимости с теми значениями x_i, при которых соответствующий ряд сходится. Полученный результат будет областью сходимости функционального ряда (4.7).

Также следует отметить, что для определения области сходимости иногда полезно применять признак сравнения.

Пример 1. Найти область сходимости функциональных рядов: а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n(x-2)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$.

Решение. а) Применим признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}(x-2)^{n+1}} : \frac{n^2}{3^n(x-2)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2\cdot 3^n(x-2)^n}{3^n\cdot 3\cdot(x-2)^n\cdot(x-2)\cdot n^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{3|x-2|}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3|x-2|}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3|x-2|}\cdot 1 = \frac{1}{3|x-2|}.$$

Согласно признаку Даламбера, ряд сходится, если последний предел меньше единицы. Исходя из этого условия, найдём интервал сходимости.

$$\frac{1}{3|x-2|} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x-2|} < 3 \Leftrightarrow |x-2| > \frac{1}{3}.$$

Последнее неравенство представим в виде объединения двух неравенств.

$$\left[\begin{array}{l} x-2 < -\dfrac{1}{3} \\ x-2 > \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{5}{3} \\ x > \dfrac{7}{3} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$ – интервал сходимости функционального ряда.

Исследуем сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости, то есть при $x = \frac{5}{3}$ и $x = \frac{7}{3}$.

Подставим $x = \frac{7}{3}$ в исходный ряд.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n \cdot \left(\frac{7}{3} - 2\right)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n \cdot \frac{1}{3^n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2$ – знакоположительный ряд, который расходится, так как для него не выполняется необходимый признак сходимости числовых рядов: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \neq 0$.

Подставим $x = \frac{5}{3}$ в исходный ряд.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n \cdot \left(\frac{5}{3} - 2\right)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{3^n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^2$ – расходящийся числовой знакочередующийся ряд, для которого не выполняются оба условия признака Лейбница.

Таким образом, для данного функционального ряда область сходимости совпадает с интервалом сходимости, то есть $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$ – область сходимости.

б) Применим признак сравнения к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin nx}{n^4}\right|$. Сравним этот ряд с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, который, как известно, сходится, так как $p = 4 > 1$. Поскольку при всех $x \in (-\infty; +\infty)$ и $n \in N$ справедливо неравенство $\left|\frac{\sin nx}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n^4}$, то по признаку сравнения исследуемый ряд с меньшими слагаемыми тоже будет сходиться при любых $x \in (-\infty; +\infty)$. То есть его область сходимости – вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$.

Задания для решения на практическом занятии

1. Найти область сходимости функционального ряда.

1.1 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3+2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$. 1.2 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3(1+x^2)}$. 1.3 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)!(x+5)^n}$.

1.4 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln(2x-1)\right)^n$. 1.5 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2-5x+11)^n}{5^{n+1}(n^3+2)}$. 1.6 $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{n}{4n^2+1}\right)\cdot\frac{1}{(x+1)^n}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти область сходимости функционального ряда.

1.1 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+4}{n\cdot(x-2)^{3n}}$. 1.2 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9^n(x+5)^{2n}}$. 1.3 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2+1}{e^{nx}}$.

1.4 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}\left(x^2-4x+6\right)^n$. 1.5 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot 5^{nx}$. 1.6 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{(x-1)^{2n}}$.

1.7 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\cdot 2^n\cdot x^n}$. 1.8 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!(x-5)^n}$. 1.9 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4(x^2+4)^n}$.

1.10 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$.

4.5 Степенные ряды

Степенным рядом называют функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x-x_0)^n, \tag{4.9}$$

где $u_1,u_2,...,u_n,...$ – числа, называемые ***коэффициентами ряда.***

Очевидно, что область сходимости степенного ряда содержит, по крайней мере, одну точку $x=x_0$.

Исследования сходимости степенных рядов основаны на применении следующей теоремы.

Теорема Абеля (основное свойство степенных рядов). Если степенной ряд (4.9) сходится при некотором значении $x=r\neq x_0$, то он сходится абсолютно при всяком значении *x*, удовлетворяющем неравенству $|x-x_0|<|r-x_0|$. Если же ряд (4.9) расходится при некотором значении $x=r_1$, то он расходится при всех *x*, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|>|r_1-x_0|$.

Следствие. Для всякого степенного ряда (4.9) существует ***интервал сходимости*** с центром в точке x_0:

$$|x-x_0|<R \text{ или } (x_0-R;x_0+R),$$

внутри которого степенной ряд сходится и вне которого ряд расходится.

На концах интервала сходимости, то есть в точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ различные степенные ряды ведут себя по-разному, то есть могут как сходиться, так и расходиться.

Неотрицательное число R – половина длины интервала сходимости, называется ***радиусом сходимости*** этого ряда. В частности, когда ряд (4.9) сходится только лишь в одной точке $x = x_0$, то считается, что радиус сходимости равен нулю: $R=0$; если же ряд (4.9) сходится при всех значениях $x \in (-\infty;+\infty)$, то радиус сходимости равен бесконечности: $R = +\infty$.

Если среди коэффициентов $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ степенного ряда (4.9) нет равных нулю, то есть ряд содержит все положительные степени $(x - x_0)$, то область сходимости можно находить по следующему **алгоритму.**

1. Найти радиус сходимости по одной из формул

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|$$

или

$$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|u_n|}}.$$

Если $R=0$, то областью сходимости является одна точка $x = x_0$.

Если $R = +\infty$, то областью сходимости является интервал $(-\infty;+\infty)$.

2. Если $R \neq 0$ и $R \neq +\infty$, то нужно составить интервал сходимости, подставив найденное значение R в выражение:

$$(x_0 - R; x_0 + R).$$

3. Провести исследование на концах интервала сходимости. Для этого подставить поочерёдно $x = x_0 + R$, затем $x = x_0 - R$ в выражение ряда (4.9). В том случае, если ряд сходится в каком-либо из концов интервала сходимости, эта точка будет входить в область сходимости (то есть круглую скобку надо поменять на квадратную). В противном случае скобка остаётся без изменений.

Замечание. Если степенной ряд (4.9) содержит не все степени $(x - x_0)$, то есть является неполным, то интервал сходимости ряда находят, непосредственно, применяя признак Даламбера или радикальный Коши к функциональному ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда.

Пример 1. Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+5}{n!}\cdot(x-3)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8n+9}{4n-1}\right)^{5n^2}\cdot(x-5)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9n-5}\cdot(x+4)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3n+1}x^{2n}$.

Решение. а) В данном случае $u_n=\dfrac{2n+5}{n!}, x_0=3$ и для нахождения радиуса сходимости R воспользуемся формулой $R=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right|$.

$$u_n=\frac{2n+5}{n!}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{2(n+1)+5}{(n+1)!}=\frac{2n+2+5}{(n+1)!}=\frac{2n+7}{(n+1)!},$$

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+5}{n!}:\frac{2n+7}{(n+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+5)\cdot(n+1)!}{n!\cdot(2n+7)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+5)\cdot n!\cdot(n+1)}{n!\cdot(2n+7)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+5)\cdot(n+1)}{(2n+7)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{:n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+5)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2+\frac{7}{n}}=\frac{+\infty\cdot1}{2}=+\infty\Rightarrow$$

область сходимости – вся числовая ось, то есть промежуток $(-\infty;+\infty)$.

б) В данном случае $u_n=\left(\dfrac{8n+9}{4n-1}\right)^{5n^2}, x_0=5$ и для нахождения радиуса сходимости R воспользуемся формулой $R=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|u_n|}}$.

$$\sqrt[n]{|u_n|}=\left(\left(\frac{8n+9}{4n-1}\right)^{5n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{8n+9}{4n-1}\right)^{5n},$$

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{8n+9}{4n-1}\right)^{5n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n-1}{8n+9}\right)^{5n}=\left[\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)^{+\infty}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4-\frac{1}{n}}{8+\frac{9}{n}}\right)^{5n}=$$

$$=\left(\frac{4-0}{8+0}\right)^{+\infty}=\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}=0.$$

Поскольку $R=0$, то областью сходимости является только одна точка $x=5$.

в) В данном случае $u_n=\dfrac{1}{9n-5}, x_0=-4$ и для нахождения радиуса сходимости R воспользуемся формулой $R=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right|$.

$$u_n=\frac{1}{9n-5}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{9(n+1)-5}=\frac{1}{9n+9-5}=\frac{1}{9n+4},$$

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{9n-5}:\frac{1}{9n+4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{9n+4}{9n-5}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]^{:n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{9+\frac{4}{n}}{9-\frac{5}{n}}=\frac{9+0}{9-0}=1.$$

Составим интервал сходимости. Для этого подставим $R=1$ и $x_0=-4$ в выражение $(x_0-R;x_0+R)$:

$$(x_0-R;x_0+R)=(-4-1;-4+1)=(-5;-3).$$

Проведём исследование на концах интервала сходимости.

1. При $x=-3$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9n-5}\cdot(-3+4)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9n-5}\cdot 1^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9n-5}$, являющийся знакоположительным. Применим к нему предельный признак сравнения. В качестве сравниваемого ряда возьмём расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{9n-5}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{9n-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{:n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{9-\frac{5}{n}}=\frac{1}{9-0}=\frac{1}{9},$$

$0<\frac{1}{9}<+\infty\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9n-5}$ тоже расходится. Поэтому точка $x=-3$ не входит в область сходимости.

2. При $x=-5$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9n-5}\cdot(-5+4)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{9n-5}$, являющийся знакочередующимся. Поскольку соответствующий ряд из модулей расходится (см. п. 1), то проверим выполнение условий признака Лейбница.

$u_1=\frac{1}{4}>u_2=\frac{1}{13}>u_3=\frac{1}{22}>\ldots>u_n=\frac{1}{9n-5}>\ldots$ – выполняется,

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{9n-5}=\frac{1}{+\infty}=0$ – выполняется.

Значит, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{9n-5}$ сходится условно, поэтому точка $x=-5$ входит в область сходимости.

Таким образом, область сходимости: $[-5;-3)$.

г) Данный ряд является неполным. Для нахождения интервала сходимости применим признак Даламбера для соответствующего ряда, составленного из абсолютных величин.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2\cdot x^{2(n+1)}}{3(n+1)+1}:\frac{n^2\cdot x^{2n}}{3n+1}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2\cdot x^{2n+2}}{3n+4}\cdot\frac{3n+1}{n^2\cdot x^{2n}}\right|=$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2\cdot x^{2n}\cdot x^2}{3n+4}\cdot\frac{3n+1}{n^2\cdot x^{2n}}\right| = x^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{3n+1}{3n+4} =$$

$$= x^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{3n+4} = x^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}} = x^2\cdot 1\cdot 1 = x^2,$$

$$x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Итак $(-1;1)$ – интервал сходимости.

Проведем исследование на концах интервала сходимости.

1. При $x=1$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3n+1}\cdot 1^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3n+1}$, который расходится, так как для него не выполняется необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{3n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{:n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3+\frac{1}{n}} = \frac{+\infty}{3+0} = +\infty \neq 0.$$

2. При $x=-1$ получим такой же расходящийся числовой ряд: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3n+1}\cdot(-1)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3n+1}$.

Значит, точки $x=1$ и $x=-1$ не входят в область сходимости.

Область сходимости: $(-1;1)$.

Задания для решения на практическом занятии

1. Найти область сходимости степенного ряда.

1.1 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n^2}\cdot x^n$. 1.2 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{\sqrt{n}}\cdot(x-1)^n$. 1.3 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6n+7}{5^{n+1}}\cdot(x+1)^n$.

1.4 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+7}{6n-1}\right)^{5n}(x+2)^n$. 1.5 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{9n-2}}\cdot(x-5)^n$. 1.6 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{(2n)!}\cdot x^n$.

1.7 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+1}{n^2}\cdot(x+4)^{3n}$. 1.8 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(5n+1)\cdot 9^n}\cdot(x-7)^{2n}$. 1.9 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[3]{2n+1}\cdot x^{2n+3}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти область сходимости степенного ряда.

1.1 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}\cdot(x+1)^n$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4n^2-1}{6n^2+1}\right)^{n^2}\cdot x^n$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^3+3}\cdot(x-2)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n\cdot 4^{n}}\cdot(x-1)^{2n}$.

1.2 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^{2}}{(n+3)!}\cdot(x-2)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{3n+1}{2n^{2}-1}\right)^{n+12}\cdot x^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+2}{n\cdot 5^{n}}\cdot(x+1)^{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+1}{5n-2}\cdot(x-8)^{2n}$.

1.3 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n+1)!}{5^{n}}\cdot(x-1)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n+5}{4n^{3}-1}\right)^{3n}\cdot x^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n\cdot 4^{n}}{n+6}\cdot(x+3)^{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+1}{8n^{3}-3}\cdot(x-5)^{3n}$.

1.4 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n!(n+1)}{n^{2}}\cdot(x+5)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n+1}{4n+1}\right)^{6n^{2}}\cdot x^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+9}}\cdot(x-4)^{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+8}{27^{n}}\cdot(x-2)^{3n}$.

1.5 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n!}{5n-1}\cdot(x-3)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{5n^{2}+1}{2n^{3}-1}\right)^{3n+1}\cdot x^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}\cdot(x-4)^{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+2}{n^{3}+1}\cdot(x-1)^{2n+1}$.

1.6 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^{2}+1}{n!}\cdot(x-5)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n^{3}+9}{n^{2}+1}\right)^{n+2}\cdot x^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5n+1}{n\cdot 3^{n}}\cdot(x+4)^{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+5}}\cdot(x+3)^{2n+1}$.

1.7 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{6^{n}}{(n+2)!}\cdot(x-8)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{9n+5}{n+9}\right)^{n^{2}}\cdot x^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n+3}}\cdot(x+6)^{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{5n-2}\cdot(x+1)^{4n}$.

1.8 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{3}\cdot n!}\cdot(x+4)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{10n-1}{5n+1}\right)^{n^{2}+n}\cdot x^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n+3}}\cdot(x-2)^{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{9^{n}(n+3)}\cdot(x-1)^{2n}$.

1.9 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n!\cdot(n+2)}{4n-1}\cdot(x-7)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n+1}{7n-2}\right)^{n^{2}+3n}\cdot x^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+5}\cdot(x+2)^{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{16^{n}}{5n-2}\cdot(x-3)^{2n}$.

1.10 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5n-2}{(n+1)!}\cdot(x-3)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^{3}}{3n^{2}+1}\right)^{2n^{2}}\cdot x^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt[3]{8n-1}\cdot(x-2)^{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{125^{n}}{3n+1}\cdot(x+4)^{3n}$.

Литература

1. Бугров, Я. С. Сборник задач по высшей математике / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва: Физматлит, 2001. – 304 с.

2. Высшая математика. Кратные интегралы. Дифференциальные уравнения. Ряды. Методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса заочной формы обучения / Е. Б. Дунина [и др.]. – Витебск: УО «ВГТУ», 2017. – 82 с.

3. Гусак, А. А. Высшая математика / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 544 с.

4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. Т. 1, 2 / Н. С. Пискунов. – Санкт-Петербург: Мифрил, 1996. – 416 с.

5. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2004. – 608 с.

6. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А. П. Рябушко [и др.]; под ред. А.П. Рябушко. – 4-е изд., испр. – Минск: Выш. школа, 2009. – 396 с.

7. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск: Выш. школа, 1993. – 301 с.

Учебное издание

Высшая математика.
Функции нескольких переменных. Комплексные числа.
Дифференциальные уравнения. Ряды

Практикум

Составители:
Никонова Татьяна Викторовна
Рубаник Оксана Евгеньевна

Редактор *Т.А. Осипова*
Корректор *Т.А. Осипова*
Компьютерная верстка *О.Е. Рубаник*

Подписано к печати 04.07.2022. Формат 60x90 1/16. Усл. печ. листов 4,6.
Уч.-изд. листов 5,8. Тираж 55 экз. Заказ № 190.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.