

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Учреждение образования  
«Витебский государственный технологический университет»

## **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ**

Методические указания по выполнению курсовой работы  
для студентов специальности  
1-54 01 01-04 «Метрология, стандартизация и сертификация  
(легкая промышленность)»

Витебск  
2022

УДК 658.56

Составители:

И. А. Петюль, В. Д. Борозна

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ», протокол № 4 от 29.12.2021.

**Теоретическая метрология:** методические указания по выполнению курсовой работы / сост. И. А. Петюль, В. Д. Борозна. – Витебск : УО «ВГТУ», 2022. – 47 с.

Методические указания являются руководством по выполнению курсовой работы по курсу «Теоретическая метрология», содержат общие требования, предъявляемые к курсовой работе, освещают последовательность ее подготовки, требования к структуре, содержанию и оформлению работы. Представлены рекомендации по выполнению разделов курсовой работы и справочный материал. Методические указания предназначены для студентов высших учебных заведений очной и заочной форм обучения.

УДК 658.56

© УО «ВГТУ», 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 Общие положения.....	6
1.1 Исходные данные к курсовой работе.....	6
1.2 Объем и содержание курсовой работы .....	6
2 Изучение конструкции средства измерения .....	7
3 Расчет погрешности результата при многократных измерениях .....	7
3.1 Определение точечных оценок закона распределения результатов измерения .....	8
3.2 Исключение грубых погрешностей .....	11
3.3 Определение закона распределения вероятности результатов измерений .....	12
3.3.1 Построение гистограммы .....	12
3.3.2 Аппроксимация гистограммы и полигона распределения аналитической функцией плотности вероятности .....	18
3.3.3 Использование критериев согласия при идентификации формы распределения результатов измерения .....	19
3.4 Определение доверительных границ случайной погрешности результата измерения .....	22
3.5 Определение доверительных границ неисключенной систематической погрешности результата измерения .....	22
3.6 Определение границ погрешности результата измерения .....	24
4 Расчет неопределенности результата измерения.....	25
Список использованных источников.....	33
Приложение А. Форма бланка задания .....	34
Приложение Б. Форма титульного листа .....	36
Приложение В. Пример описания конструкции средства измерения.....	37
Приложение Г. Некоторые теоретические законы распределения вероятности .....	41
Приложение Д. Интегральная функция распределения Пирсона. Значение $\chi^2_{k,p}$ для различных $k$ и $P$ . Интегральная функция $\chi^2$ -распределения Пирсона. Значения $\chi^2_{k;p}$ для различных $k$ и $p$ .....	43
Приложение Е. Значения функции Лапласа.....	44
Приложение Ж. Статистика $d$ для критерия 1.....	45
Приложение И. Значения $P$ для вычисления критерия 2.....	45
Приложение К. Интегральная функция нормального распределения. Значение $z$ для различных $\Phi(z)$ .....	45
Приложение Л. Значения распределения Стьюдента $t$ .....	46

## ВВЕДЕНИЕ

Измерение является сложным процессом, включающим в себя взаимодействие ряда структурных элементов – измерительной задачи, объекта измерения, принципов, методов и средств измерения, его модели, условий измерения, оператора, результата и погрешности измерения. Сам процесс измерения состоит из ряда последовательных этапов, включающих в себя постановку измерительной задачи, планирование измерительного эксперимента, непосредственно измерительный эксперимент, обработку экспериментальных данных, анализ и интерпретацию полученных результатов, а также запись результата в соответствии с установленной формой представления. Грамотное и сознательное выполнение всех этапов измерения является залогом сведения к минимуму ошибочных выводов, сделанных по результатам измерений, и принятия решений, не приводящих к материальным и моральным потерям [1].

В практической деятельности качество результата измерения оценивается как систематической, так и случайной составляющими погрешности.

Появление случайной составляющей погрешности связано с проблемой измерения параметров реальных процессов или явлений в реальных условиях. Изменение температуры, напряжения питания при многократном измерении одной и той же физической величины, сравнительная оценка технологических процессов по их точности, производительности, экономичности и т. д. – все это, а также множество других явлений, оказывающих влияние на качество результата измерения, носят случайный характер. Соответственно математические модели, в первую очередь, законы распределения вероятности (ЗРВ) случайных составляющих, влияющих на качество результата измерения, не являются теоретической абстракцией, а описывают реально существующие физические явления. Так, например, равномерным законом описывается неточность от округления при расчетах, неточность, вызванная трением в стрелочных приборах с креплением подвижной части на кернах и подпятниках; арксинусоидальному закону распределения вероятности подчиняется неточность средств измерения электрических и неэлектрических величин, вызванная влиянием напряжения силовых цепей с частотой 50 Гц; влияние температуры на качество измерений приборами, работающими в течение всего года на открытом воздухе, имеют двухмодальное распределение и т. д. [2, 3].

Необходимо учитывать, что вид закона распределения вероятности, определяющего качество результата измерения, имеет и экономическую составляющую многократных измерений, так как от него зависит рассеяние всех оценок (стандартного отклонения, асимметрии, эксцесса и т. д.). То есть для обеспечения одного и того же качества измерения при одном законе распределения можно ограничиться достаточно малым количеством экспериментальных данных, тогда как при другом – количество исходных данных должно быть значительно больше.

При измерениях, к результатам которых предъявляются высокие требования (особенно если ошибка в прогнозе получаемого результата может повлечь

за собой большие экономические или человеческие потери), необходимо при анализе качества результата измерения определять не только оценку характеристики положения закона распределения вероятности (среднего арифметического, медианы, моды и т. д.), но и закон распределения этой оценки, а также трансформацию во времени закона распределения оценки характеристики положения, вызванную влиянием различных факторов с различными статистическими характеристиками. Это, в первую очередь, связано с тем, что при одной и той же доверительной вероятности от закона распределения, характеризующего качество результата измерения, зависят размеры доверительного интервала, который в общем случае определяет возможные границы изменения оценок характеристик положения. И статистическая обработка полученных при измерении экспериментальных данных должна показать, в каких пределах и с какой вероятностью может находиться оценка характеристики положения ЗРВ, с которой идентифицируется значение измеряемой физической величины.

Поэтому первая и вторая части работы направлены на изучение широко применяемых в промышленности средств измерения, получение практических навыков по статистической обработке результатов многократных измерений, практическое освоение методов суммирования неисключенных систематических погрешностей и случайных погрешностей.

Новой концепцией, содержащей подход к оценке точности результата измерения, является концепция оценки неопределенности результата измерения. В настоящий момент для решения многих метрологических задач неопределенность претендует на звание «единой характеристики точности» результата измерения [4]. Учитывая это направление развития современной метрологии, третья часть курсовой работы направлена на изучение основных положений концепции неопределенности, получение практических навыков оценивания неопределенности результата при испытаниях продукции легкой промышленности.

Таким образом, целью курсовой работы является изучение различных подходов к оценке точности результатов измерений, получение практических навыков статистической обработки результатов многократных измерений, закрепление знаний по основным разделам курса «Теоретическая метрология».

Основными задачами выполнения курсовой работы являются:

- закрепление и систематизация знаний в области теоретической метрологии;
- формирование умения пользоваться справочной литературой, таблицами, нормативными документами (ТР, ГОСТ и др.);
- закрепление знаний по оценке точности результатов измерений;
- развитие технического мышления.

# 1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

## 1.1 Исходные данные для курсовой работы

Исходными данными для первой и второй частей курсовой работы являются:

- физическая величина (ФВ);
- конкретный тип и вид средства измерения для измерения указанной ФВ;
- массив результатов измерений ФВ.

Исходными данными для третьей части курсовой работы являются:

- методика выполнения измерений (проведения испытаний);
- результаты измерений (испытаний), полученные по заданной методике.

Задание на курсовую работу оформляется на специальном бланке (приложение А). Варианты заданий для выполнения расчетов по курсовой работе выдаются руководителем.

## 1.2 Объем и содержание курсовой работы

Тема работы формулируется общим образом: «Обработка результатов измерений».

Структура курсовой работы должна включать:

- задание;
- содержание;
- введение, с указанием целей и задач работы;
- основную часть, состоящую из трех разделов (подразделов при необходимости);
- заключение;
- список использованных источников.

Основными разделами курсовой работы являются:

- 1) изучение конструкции средства измерения;
- 2) расчет погрешности результата многократного измерения физической величины;
- 3) оценивание неопределенности результата измерения.

Для удобства выполнения и проверки работы допускается разбивать разделы на подразделы, которые необходимо включать в содержание.

Пример оформления титульного листа представлен в приложении Б.

Расчетно-пояснительная записка выполняется на белой бумаге формата А4 на одной стороне листа. Записка выполняется аккуратно, в соответствии с требованиями к оформлению по ГОСТ 7.32. По тексту работы приводятся все расчетные формулы и промежуточные вычисления, необходимые графики и таблицы. Допускается написание формул рукописным способом. В конце работы приводится перечень использованной литературы.

Объем работы не должен превышать 35 страниц машинописного текста.

В приложение к курсовой работе в обязательном порядке включают используемые технические нормативные правовые акты (ТНПА) на методы испытаний или измерений и паспорта на средства измерения или их отдельные страницы.

## **2 ИЗУЧЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ**

Для выполнения данного раздела следует пользоваться литературными источниками [5–11], ресурсом сети интернет, каталогами и технической документацией на средства измерений.

В данном разделе необходимо отразить следующую информацию:

- для указанной в задании ФВ выбрать и обосновать конкретный тип и марку средства измерения (СИ), учитывая, что с его помощью получены результаты измерения, представленные в задании для выполнения второго раздела работы;
- привести принципиальную схему СИ и сделать её краткое описание;
- изложить физический принцип работы СИ;
- изучить технические и метрологические характеристики СИ;
- провести анализ источников погрешностей измерений.

При описании метрологических характеристик СИ необходимо обратить внимание на такие метрологические характеристики, как диапазон измерений и разрешающая способность, в обязательном порядке указать характерные виды погрешности и их нормируемые значения.

При анализе источников погрешностей необходимо описать возможные причины появления элементарных составляющих погрешностей, дать оценку предполагаемого характера изменения каждой из составляющих погрешностей (систематическая или случайная).

Пример описания конструкции средства измерения представлен в приложении В.

## **3 РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ**

Расчет погрешности результата при многократных измерениях осуществляется в следующей последовательности:

- составление ранжированного ряда результатов измерений;
- определение точечных оценок закона распределения результатов измерения (среднего значения, дисперсии, среднего квадратического отклонения, эксцесса и контрэксцесса);
- исключение грубых погрешностей;
- определение закона распределения вероятности измеренной величины (построение гистограммы, аппроксимация функции распределения величины, идентификация формы ЗРВ с помощью критериев согласия);
- определение доверительных границ случайной погрешности;

- определение доверительных границ неисключенной систематической погрешностью;
- определение границ погрешности результата измерения (суммирование случайной и систематической погрешности).

### 3.1 Определение точечных оценок закона распределения вероятности результатов измерения

Составляем ранжированный ряд результатов измерений, для чего располагаем результаты измерений исходного массива от минимального к максимальному в порядке возрастания, нумеруем их и определяем  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$ .

Определяем *среднее арифметическое значение* массива экспериментальных данных  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.1)$$

где  $n$  – количество отсчетов в массиве экспериментальных данных.

В качестве оценки центра распределения среднее арифметическое значение применяется для класса распределений, близких к нормальным. Но для симметричных экспоненциальных островершинных распределений наиболее эффективной является оценка медианы.

*Медиана* – это такое значение признака, которое разделяет ранжированный ряд распределения на две равные по числу результатов измерения части. Для нахождения медианы нужно отыскать значение признака, которое находится на середине упорядоченного ряда. Для этого необходимо расположить данные (выданные значения) по возрастанию (от наименьшего к большему).

*Медиану* рассчитывают по следующим формулам:

$$x_{\text{мед}} = \frac{1}{2} \left( x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right) \text{ при четном } n, \quad (3.2)$$

$$x_{\text{мед}} = x_{\frac{n+1}{2}}, \text{ при нечетном } n. \quad (3.3)$$

Для равномерного, трапецеидального распределений целесообразно определять оценку *центра размаха*:

$$x_p = (x_1 + x_n) / 2. \quad (3.4)$$

С целью оценки рассеяния массива экспериментальных данных относительно среднего арифметического определяем несмещенную оценку *дисперсии*  $S_x^2$  и *среднее квадратическое отклонение* (СКО)  $S_x$ :



$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (3.5)$$

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.6)$$

*Дисперсия* имеет размерность квадрата случайной величины и выражает как бы мощность рассеяния относительно постоянной составляющей. *СКО* имеет размерность случайной величины и является действующим значением рассеяния этой величины.

Оценку *СКО* среднего арифметического значения определяют по формуле:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.7)$$

Чтобы оценить асимметрию ЗРВ, определяется оценка третьего центрального момента  $\bar{\mu}_3$ , характеризующая несимметричность распределения (то есть скошенность распределения: когда один спад – крутой, а другой – пологий):

$$\bar{\mu}_3 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3. \quad (3.8)$$

Третий центральный момент и его оценка имеют размерность куба случайной величины, поэтому для относительной характеристики асимметрии применяют безразмерный коэффициент асимметрии  $A$ :

$$A = \frac{\bar{\mu}_3}{S_x^3}. \quad (3.9)$$

Для симметричных распределений ЗРВ относительно математического ожидания  $\mu_3 = 0$ . Однако в реальности может быть определена только оценка третьего центрального момента  $\bar{\mu}_3$ , которая, являясь случайной величиной, может приближаться к нулю, но не быть равной ему. Достоверность оценки величины асимметрии может быть определена с помощью параметра, характеризующего его *рассеяние*:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}. \quad (3.10)$$

Если выполняется условие  $|A| \leq 1,5\sigma_A$ , то можно считать, что ЗРВ симметричный, если же  $|A| \geq 1,5\sigma_A$ , то несимметричность ЗРВ нужно учесть.

Чтобы оценить протяженность ЗРВ, определяется оценка четвертого центрального момента  $\bar{\mu}_4$ :

$$\bar{\mu}_4 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4. \quad (3.11)$$

Четвертый центральный момент имеет размерность четвертой степени случайной величины, поэтому для удобства чаще применяют относительную величину, которая называется эксцессом  $E$  и определяется по формуле:

$$E = \frac{\bar{\mu}_4}{S_x^4}. \quad (3.12)$$

Эксцесс распределения для разных законов может иметь значение от 1 (для дискретного двухзначного) до  $\infty$  (для распределения Коши).

Для классификации распределений по их форме удобнее использовать оценку контрэксцесса  $\bar{k}$ , изменяющуюся от 0 до 1 и определяемую по формуле:

$$\bar{k} = \frac{1}{\sqrt{E}}. \quad (3.13)$$

В таблице 3.1 приведены числовые значения эксцесса и контрэксцесса для некоторых ЗРВ [2, с. 63, 66, 68].

Полученные в результате расчета значения эксцесса и контрэксцесса целесообразно сравнить со значениями, приведенными в таблице 3.1, и сделать предположение о ЗРВ физической величины.

Таблица 3.1 – Числовые значения эксцесса и контрэксцесса для некоторых ЗРВ

Распределение	Эксцесс, $E$	Контрэксцесс, $k$	Энтропийный коэффициент
1	2	3	4
Прямоугольное (отношение верхнего основания к нижнему $b/a = 1$ )	1,8	0,745	1,73
Трапецеидальное (отношение верхнего основания к нижнему $b/a = 2/3$ )	1,9	0,728	1,83
Трапецеидальное (отношение верхнего основания к нижнему $b/a = 1/2$ )	2,016	0,704	1,94
Трапецеидальное (отношение верхнего основания к нижнему $b/a = 1/3$ )	2,184	0,677	2,00

Окончание таблицы 3.1

1	2	3	4
Треугольное ( $b / a = 0$ )	2,4	0,645	2,02
Лапласа ( $\alpha = 1$ )	6	0,408	1,92
Нормальное (Гаусса) ( $\alpha = 2$ )	3	0,577	2,07
Экспоненциальное			
$\alpha = 1 / 4$	458	0,0467	0,085
$\alpha = 1 / 3$	107,25	0,0966	0,424
$\alpha = 1 / 2$	25,2	0,199	1,35
$\alpha = 3 / 4$	10	0,32	
$\alpha = 1\frac{1}{2}$	3,85	0,51	
Коши	0	$\infty$	
Арксинусоидальное	1,5	0,816	1,11

Данный подраздел должен быть закончен предположением о виде ЗРВ измеренной физической величины.

### 3.2 Исключение грубых погрешностей

*Грубая погрешность* – это погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда.

Вопрос о том, содержит ли массив исходных данных грубую погрешность, решается общими методами проверки статистических гипотез с применением специальных статистических критериев, выбор которых зависит от *вида распределения, объема выборки и выбранной доверительной вероятности*. Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения  $x$  не содержит грубой погрешности, т. е. является одним из значений измеряемой величины. Наибольшее сомнение могут вызвать минимальное и максимальное значение в ранжированном ряду результатов измерений.

На основе предположения о виде ЗРВ, сделанного в подразделе 3.1, необходимо выбрать приемлемые статистические критерии для исключения грубых погрешностей.

Если предполагается, что закон распределения нормальный, то можно использовать следующие критерии: критерий трех сигм, критерий Романовского, критерий Шарлье, критерий вариационного размаха и т. д. Формулы и справочные данные для расчета указанных критериев указаны в [12, с. 4].

Рекомендуется применить несколько критериев и проверить сначала минимальное и максимальное значение.

Если предполагается, что закон распределения равномерный, трапециoidalный или другой, то исключение грубых погрешностей осуществляется с помощью нахождения коэффициента  $t_{cp}$  для расчета границ предельных значений

$$x_{\min} = \bar{x} - t_{zp} Sx, \quad x_{\max} = \bar{x} + t_{zp} Sx. \quad (3.14)$$

Коэффициент  $t_{zp}$  определяют по формуле:

$$t_{zp} = 1,62 [3,8 (E-1,6)^{2/3}]^{lg lg [1/(1-P)]}. \quad (3.15)$$

где  $E$  – эксцесс распределения;

$$P = \frac{n}{n+1};$$

$n$  – число результатов наблюдений.

Выражение (3.15) применимо для:

- классов экспоненциальных и трапецеидальных распределений;
- распределений Стьюдента при  $n > 8$ ;
- распределения Лапласа ( $E = 6, k = 0,4$ );
- нормального распределения ( $E = 3, k = 0,577$ );
- трапецеидального распределения с отношением верхнего и нижнего оснований 1:2 ( $E = 2, k = 0,7$ );
- равномерного распределения ( $E = 1,8, k = 0,745$ ).

Для равномерного распределения за границы грубой погрешности можно принять величину  $\pm 1,8 Sx$ .

Отсчеты, не попадающие в рассчитанный интервал, считаются промахами и должны быть исключены из массива данных. После их исключения необходимо пересчитать точечные оценки ЗРВ.

### 3.3 Определение закона распределения вероятности результатов измерений

#### 3.3.1 Построение гистограммы

Для подтверждения гипотезы о законе распределения, его визуализации и уточнения формы прибегают к построению гистограмм.

**Гистограмма** представляет собой ступенчатый график, состоящий из прямоугольников, у которых основаниями служат частные интервалы  $\Delta x_i$  на оси абсцисс, а площади равны частотам значений, попадающих в эти интервалы.

Построение можно выполнить с помощью любых пакетов статистических программ или приложения Microsoft Excel [12, с. 25].

Алгоритм построения гистограммы следующий:

- находим оптимальное число интервалов группирования экспериментальных данных;
- определяем длину интервала;
- устанавливаем граничные значения интервалов;
- подсчитываем количество значений попавших в границы интервалов;

- рассчитываем относительную частоту попаданий значений в интервал;
- строим гистограмму и полигон.

1. Определяем оптимальное число интервалов группирования экспериментальных данных.

Необходимость оптимизации числа интервалов связана, в первую очередь, с требованием построения гистограммы, наиболее близкой к действительной кривой плотности распределения вероятности, и исключения промахов при определении закона распределения вероятности экспериментальных данных.

Если число интервалов, на которые разбивается вся совокупность экспериментальных данных, будет велико, а интервалы соответственно будут малы, то гистограмма будет отличаться от плавной кривой своей изрезанностью, многими всплесками и впадинами, а некоторые интервалы могут быть пустыми. Такие гистограммы иногда называют гребенчатыми. Если число интервалов будет мало, то могут быть потеряны характерные особенности действительного закона распределения вероятности.

Для выполнения задания предлагается два варианта выбора числа интервалов группирования экспериментальных данных:

1) значение числа интервалов находится между минимальным и максимальным числами, которые могут быть определены по формулам [2, с. 180]

$$m_{\min} = 0,55 n^{0,4} \text{ и } m_{\max} = 1,25 n^{0,4}, \quad (3.16)$$

где  $n$  – число отсчетов.

2) число интервалов может быть выбрано из таблицы 3.2 [13, с. 149].

Таблица 3.2 – Рекомендуемое число интервалов для построения гистограмм в зависимости от числа отсчетов

Число отсчетов	Рекомендуемое число интервалов
40–100	7–9
101–500	8–12
501–1000	10–16
1001–10000	12–22

При выборе конкретного числа интервалов группирования рекомендуется учитывать следующее:

1) если предполагается, что закон распределения плотности вероятности симметричный, с явно выраженной модой, то желательно, чтобы количество интервалов  $m$  было нечетным (так как при четном  $m$  и островершинном или двухмодальном симметричном распределении в центре гистограммы оказываются два равных по высоте столбца и середина кривой распределения плотности вероятности принудительно делается более плоской). Если же несиммет-

ричный закон распределения плотности вероятности, то требования к нечетности количества интервалов не предъявляются;

2) интервалы должны быть равной длины (исключением могут быть первый и последний);

3) центральный интервал (при нечетном количестве интервалов) желательно располагать в середине размаха экспериментальных данных симметрично относительно середины;

4) если гистограмма оказывается явно двухмодальной, число интервалов может быть увеличено в 1,5–2 раза таким образом, чтобы на каждую моду приходилось бы примерно  $m$  интервалов;

5) в каждом интервале должно быть не менее 5 отсчетов (выполнение этого требования обязательно при проверке соответствия ЗРВ экспериментальным данным по критерию согласия К. Пирсона);

6) для получения гистограммы, наиболее близкой к реальному закону распределения вероятности, целесообразно построить несколько гистограмм, которые отличались бы друг от друга количеством интервалов (при этом варьирование количества интервалов должно быть в пределах рекомендуемых). Из построенных таким образом гистограмм выбирается для дальнейшего анализа гистограмма, которая отвечает максимальному числу признаков, установленных в результате предварительного анализа;

7) если какое-либо значение отсчета попадает на границу интервала группирования, то рекомендуется разделить количество этих отсчетов пополам на два соседних интервала.

2. *Определяем длину интервала  $\Delta x$  по формуле*

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{m}, \quad (3.17)$$

где  $m$  – число интервалов гистограммы.

3. *Определяем граничные значения интервалов.*

Наименьшее граничное значение для первого интервала будет равно  $x_{min}$ . Чтобы найти вторую границу интервала к  $x_{min}$ , прибавляем длину интервала  $\Delta x$ .

Составляем таблицу для подсчета частот соответствующих интервалов (см. табл. 3.4).

4. *Определяем количество значений, попавших в каждый интервал, и подсчитываем частоты.*

5. *Рассчитываем экспериментальную плотность распределения вероятности  $p_{экс}(x)$  попадания отсчета в  $m_i$  интервал в зависимости от  $x$  по следующей формуле:*

$$p_{экс}(x) = \frac{N_i}{n \cdot \Delta x}, \quad (3.18)$$

где  $N_i$  – частота (количество отсчетов, попавших в данный интервал);  
 $n$  – количество отсчетов в исходном массиве;  
 $\Delta x$  – длина интервала.

*б. Строим гистограмму распределения величины.*

Для этого наносим по оси абсцисс границы интервалов и обозначаем середины, а по оси ординат – шкалу для частот. Для каждого интервала строим прямоугольник с основанием, равным ширине интервала, и с высотой, соответствующей частоте попадания данных в этот интервал (или плотности распределения вероятности  $p_{\text{экс}}(x)$ ). Тогда в гистограмме площадь прямоугольника равна вероятности попадания отсчета в интервал, который является основанием прямоугольника).

После построения гистограммы необходимо построить *полигон*, который более наглядно, чем гистограмма, отражает форму распределения. Построение осуществляется путем соединения прямыми середин верхних оснований каждого столбца гистограммы. За пределами гистограммы, как слева, так и справа, следуют пустые интервалы, в которых точки, соответствующие их серединам, лежат на оси абсцисс. Все эти точки при построении полигона и соединяются между собой отрезками прямых линий, образуя совместно с осью  $x$  замкнутую фигуру, площадь которой в соответствии с правилом нормирования равна единице.

### **Пример 1.**

Проведено  $n=100$  измерений величины  $x$  и получены результаты, представленные в таблице 3.3. В соответствии с таблицей 3.2 число столбцов может быть  $m=7-9$ . Интервалы и середины столбцов для  $m=9$ , экспериментальная частота и экспериментальная плотность представлены в таблице 3.4. Построенная гистограмма и полигон представлены на рисунке 3.1.

Таблица 3.3 – Результаты измерений физической величины  $x$

5,11	8,32	7,23	5,89	8,35	6,69	8,90	6,68	8,28	7,26
7,22	8,92	5,73	9,45	5,12	9,50	5,15	9,56	5,72	5,87
7,30	6,57	8,37	9,91	7,39	6,65	8,97	6,72	9,73	8,30
6,62	5,47	9,22	6,64	9,59	9,76	6,75	8,45	5,88	8,99
5,90	7,84	8,47	9,05	7,16	5,23	5,02	7,19	8,57	7,45
6,52	7,85	6,05	5,74	9,68	9,62	8,48	7,85	7,49	5,75
5,42	6,64	7,34	9,12	5,43	6,39	5,23	6,85	7,94	8,52
7,15	5,12	8,04	5,17	9,80	7,20	9,26	7,52	6,10	7,17
8,32	8,40	7,21	9,29	9,79	6,64	7,58	8,79	8,11	8,72
6,61	6,66	9,19	7,62	8,88	8,17	6,55	9,23	7,77	6,08

Таблица 3.4 – Данные для построения гистограммы при  $m=9$

№ интервала	Границы интервалов	Середина интервала, $x_i$	Экспериментальная частота, $N_{экс}$	Экспериментальная плотность распределения вероятности, $p_{экс}(x)$
1	5,00...5,56	5,28	11	0,196
2	5,56...6,12	5,84	11	0,196
3	6,12...6,68	6,40	12	0,214
4	6,68...7,24	6,96	12	0,214
5	7,24...7,80	7,52	10	0,179
6	7,80...8,36	8,08	12	0,214
7	8,36...8,92	8,64	12	0,214
8	8,92...9,48	9,2	10	0,179
9	9,48...10,04	9,76	10	0,179

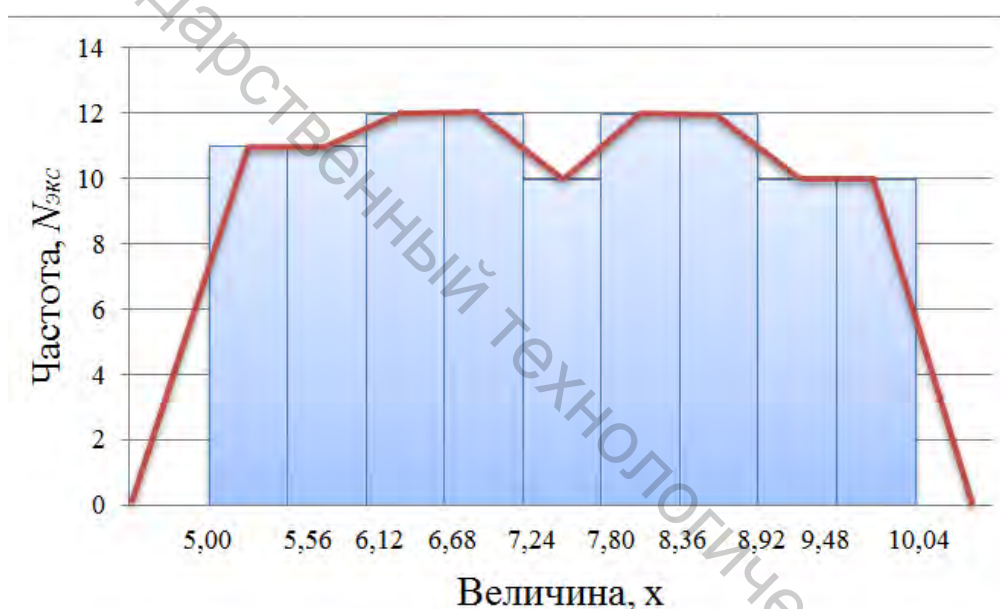


Рисунок 3.1 – Гистограмма и полигон, построенные по данным таблицы 3.4 ( $m = 9$ )

По внешнему виду гистограммы и полигона можно считать, что закон распределения вероятности близок к равномерному.

### Пример 2

Проведено  $n=100$  измерений величины  $x$  и получены результаты, представленные в таблице 3.5. В соответствии с таблицей 3.2 число столбцов может быть  $m=7-9$ . Интервалы и середины столбцов для  $m=7$ , экспериментальная частота и экспериментальная плотность представлены в таблице 3.6. Построенная гистограмма и полигон представлены на рисунке 3.2.



Таблица 3.5 – Результаты измерений физической величины  $x$

24,959	24,972	24,964	25,078	24,963	24,997	25,119	24,976	24,966	25,030
25,080	24,991	25,053	25,003	24,986	25,002	24,990	25,069	24,948	25,038
25,089	25,015	24,980	25,012	24,996	25,011	25,029	24,973	25,067	25,027
25,051	24,916	25,005	24,991	24,959	24,976	25,021	24,931	24,999	25,016
25,012	25,034	24,875	25,049	25,042	24,976	25,025	25,048	24,920	25,027
25,006	25,043	25,021	25,044	25,082	25,103	24,993	24,955	25,026	24,907
25,015	24,858	24,973	25,085	24,967	24,977	24,962	25,032	24,995	24,955
25,045	25,004	25,066	25,014	24,989	25,026	25,074	25,078	24,985	24,984
25,043	25,022	25,045	24,908	24,982	24,960	24,984	25,013	25,010	25,017
24,937	25,015	24,991	25,104	25,024	24,913	24,987	24,939	24,922	24,942

Таблица 3.6 – Данные для построения гистограммы при  $m = 9$

№ интервала	Границы интервалов	Середина интервала, $x_i$	Экспериментальная частота, $N_{\text{экс}}$	Экспериментальная плотность распределения вероятности, $p_{\text{экс}}(x)$
1	24,858...24,895	24,877	2	0,541
2	24,895...24,932	24,914	7	1,892
3	24,932...24,969	24,951	14	3,784
4	24,969...25,006	24,988	29	7,838
5	25,006...25,043	25,025	28	7,568
6	25,043...25,080	25,062	14	3,784
7	25,080...25,119	25,100	6	1,622

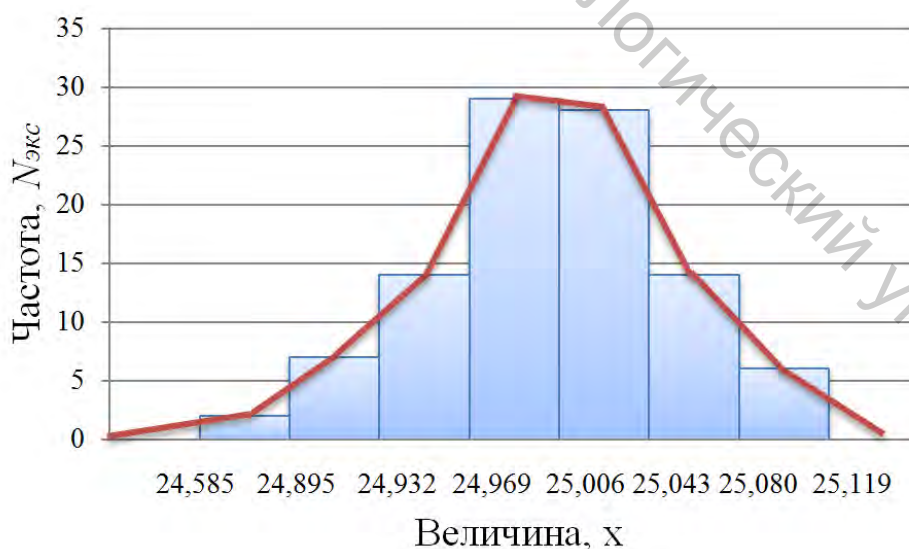


Рисунок 3.2 – Гистограмма, построенная по данным таблицы 3.5 ( $m = 7$ )

По внешнему виду гистограммы и полигона можно считать, что закон распределения вероятности близок к нормальному.

### 3.3.2 Аппроксимация гистограммы и полигона распределения аналитической функцией плотности вероятности

В данном разделе необходимо провести аппроксимацию предполагаемого ЗРВ случайной величины теоретической функцией плотности вероятности (аппроксимирующей функцией).

Аппроксимацией называется нахождение такой теоретической функции (аппроксимирующей функции), которая была бы близка к полученной по экспериментальным данным.

В связи с тем, что некоторые распределения по внешнему виду похожи друг на друга, в некоторых случаях целесообразно для дальнейшего анализа рассмотреть не одну аппроксимирующую функцию, а две.

Сравнив полученный полигон с графиками плотности распределения различных законов, которые представлены в приложении Г, необходимо подобрать теоретическую функцию распределения и записать ее аналитическое выражение.

Для построенной в разделе 3.3.1 гистограммы, представленной на рисунке 3.1, принимаем аппроксимирующую кривую в виде равномерного ЗРВ.

В соответствии с приложением Г аналитическое выражение аппроксимирующей функции можно записать в виде дифференциальной функции распределения, описывающей плотность распределения вероятностей, в следующем виде:

$$p_{теор}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\infty \leq x \leq a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{при } b \leq x \leq +\infty \end{cases} \quad (3.19)$$

Таким образом, значения теоретической плотности распределения вероятности  $p_{теор}(x)$  получаются по теоретической зависимости, которая должна быть близка по форме к экспериментально полученному полигону и описываться аппроксимирующим аналитическим выражением – дифференциальной функцией распределения.

$$\text{В рассматриваемом примере } p_{теор}(x) = \frac{1}{10,04 - 5,0} = 0,198.$$

Для примера 2 в разделе 3.3.1 может быть рассмотрено аналитическое выражение аппроксимирующей функции для нормального закона распределения вероятности:

$$p_{теор}(x) = \frac{1}{S_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S_x^2}}, \quad (3.20)$$

где  $S_x$  – среднее квадратическое отклонение.

При выполнении курсовой работы выражение записывается с конкретными параметрами, полученными в результате обработки результатов измерений.

### 3.3.3 Использование критериев согласия при идентификации формы распределения результатов измерения

В качестве способа оценки близости распределения экспериментальных данных к принятой аппроксимирующей функции закона распределения рекомендуется использование критериев согласия.

Критерии согласия позволяют оценить вероятность того, что полученные результаты измерения не противоречат сделанному предположению о виде закона распределения рассматриваемой случайной величины.

В различных критериях согласия в качестве меры расхождения экспериментального и теоретического законов распределения принимаются различные величины.

Рассмотрим алгоритм вычисления критерия Пирсона ( $\chi^2$ ) и d-составной критерий. Студент в курсовой работе вправе использовать другие известные ему критерии согласия.

В критерии согласия **К.Пирсона** (критерий  $\chi^2$ ) за меру расхождения принимается величина  $\chi^2$ , опытное (расчетное) значение  $\chi^2_q$  которой определяется формулой

$$\chi^2_q = \sum_{i=1}^m \frac{(N_{\text{экс}} - N_{\text{теор}})^2}{N_{\text{теор}}}, \quad (3.21)$$

где  $m$  – число сравниваемых частот (число интервалов, на которые разбиты все результаты измерений величины  $x$ );

$N_{\text{экс}}$  – экспериментальная частота (количество отсчетов, попавших в  $i$ -й интервал);

$N_{\text{теор}} = nP_i$  – теоретическая частота;

$n$  – количество отсчетов в исходном массиве результатов измерений;

$P_i$  – вероятность попадания случайной величины  $x$  в  $i$ -й интервал.

При  $n \rightarrow \infty$  закон распределения  $\chi^2_q$  независимо от вида закона распределения случайной величины  $x$  стремится к закону  $\chi^2$ -распределения с  $k = m - r - 1$  степенями свободы, где  $r$  – число параметров теоретического закона распределения, вычисляемых по данной выборке ( $r = 2$  для нормального и равномерного распределения).

Теоретические значения интегральной функции  $\chi^2$  распределения Пирсона для различных  $k$  и  $P$  представлены в приложении Д.

Для применения критерия Пирсона в общем случае необходимо, чтобы объем выборки  $n$  и количество разрядов  $m_i$  были достаточно велики (практически считается достаточным, чтобы было  $n \geq 50 \div 60$ ,  $m_i \geq 5 \div 8$ ).

Критерий согласия К. Пирсона  $\chi^2$  позволяет провести сравнение двух моделей и в том случае, когда для них используется разное число столбцов.

Если рассматривается нормальный закон распределения вероятности, то результаты расчетов следует представить в виде таблицы 3.7, для других законов промежуточные вычисления свести в таблицу 3.8.

Нормированное отклонение от среднего арифметического  $t_i$ , показывающее, на сколько и в каком направлении отстоит от среднего арифметического правая граница  $x_i$  каждого интервала определяется по формуле:

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x} \quad (3.22)$$

где  $\bar{x}$  – среднее арифметическое значение;  
 $S_x$  – среднее квадратическое отклонение;  
 $x_i$  – середина столбца гистограммы.

Значение функции Лапласа  $\Phi(t_i)$  определяется для различных аргументов  $t_i$  с помощью таблицы (приложение Е). Если значение  $t_i$  отрицательно, то значение функции тоже будет отрицательным.

Вероятность попадания  $P_i$  значения в  $i$ -й интервал определяем по формуле:

$$P_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}). \quad (3.23)$$

При расчетах учесть, что  $\Phi(-\infty) = -0,5$ , а  $\Phi(+\infty) = 0,5$ .

Таблица 3.7 – Расчет критерия Пирсона для нормального ЗРВ

$i$	Середина интервала	Эксп. частота, $N_{экс}$	Нормированное отклонение от среднего арифметического, $t_i$	Значение функции Лапласа, $\Phi(t_i)$	Вероятность попадания значения в $i$ -й интервал, $P_i$	Теорет. частота, $N_{теор} = nP_i$	$(N_{экс} - N_{теор})^2 / N_{теор}$
1							
2							
...	...	..	...	...	...	...	...
Расчетное значение критерия Пирсона							$\Sigma = \dots$

Таблица 3.8 – Расчет критерия Пирсона

$i$	Середина интервала	Эксп. частота, $N_{экс}$	Теорет. плотность распределения вероятности, $p_{теор}(x)$	Вероятность попадания значения в $i$ -й интервал, $P_i = p_{теор}(x) \Delta x$	Теорет. частота, $N_{теор} = nP_i$	$(N_{экс} - N_{теор})^2 / N_{теор}$
1						
2						
...	...	...	...	...	...	...
Расчетное значение критерия Пирсона						$\Sigma = \dots$

Теоретическая плотность распределения вероятности  $p_{теор}(x)$  определяется с использованием дифференциальной функции ЗРВ, вид которой установлен в разделе 3.3.2.

При небольшом числе наблюдений ( $n < 50$ ) проверка гипотезы о принадлежности результатов наблюдений к нормальному распределению проводится по составному критерию (по ГОСТ 8.207-76).

Первоначально вычисляют отношение  $\bar{d}$  (критерий 1)

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n S_x^*}, \quad (3.24)$$

где  $S_x^*$  – смещенная оценка среднего квадратического отклонения, вычисляемая по формуле

$$S_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \quad (3.25)$$

Результаты наблюдений группы можно считать распределенными нормально, если

$$d_{1-q_1/2} \leq \bar{d} \leq d_{q_1/2},$$

где  $d_{1-q_1/2}$  и  $d_{q_1/2}$  – квантили распределения, получаемые из таблицы приложения Ж, причем  $q_1$  – заранее выбранный уровень значимости критерия.

Затем продолжают проверку по критерию 2. Можно считать, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению, если не более  $m$  разностей  $|x_i - \bar{x}|$  превзошли значение  $z_{p/2} \cdot S_{\bar{x}}$ , где  $S_{\bar{x}}$  – оценка среднего квадратического отклонения, вычисляемая по формуле (3.7),  $z_{p/2}$  – верхняя квантиль распределения нормированной функции Лапласа, отвечающая вероятности  $P/2$ .

Таблица 3.9 – Расчет критерия 2

$i$	Значения, $x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$z_{p/2} \cdot S_{\bar{x}}$
1			...
2			
...	...	...	

Значения  $P$  определяются из таблицы приложения И по выбранному уровню значимости  $q_2$  и числу результатов наблюдений  $n$ . При уровне значимости, отличном от предусмотренных в таблице приложения К, значение  $P$  находят путем линейной интерполяции.

Таблица 3.10 – Квантили  $z_{p/2}$  интегральной функции Лапласа

$p$	0,90	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
$z_{p/2}$	1,65	1,96	2,06	2,17	2,33	2,58

В случае, если хотя бы один из критериев не соблюдается, то считают, что распределение результатов наблюдений группы не соответствует нормальному.

Подробное описание расчетов данных критериев представлено в [12, с. 29].

### 3.4 Определение доверительных границ случайной погрешности результата измерения

Границы значения случайной составляющей погрешности измерения  $\varepsilon$ , определяются:

$$\varepsilon = \pm t \cdot S_{\bar{x}}, \quad (3.26)$$

где  $t$  – параметр закона распределения величины;

$S_{\bar{x}}$  – оценка СКО.

Параметр закона распределения величины  $t$  зависит от вида распределения, количества результатов измерений, уровня доверительной вероятности.

При нормальном ЗРВ и большом количестве измерений  $n > 30$  множитель  $t$  равен квантильному множителю  $z_p$  (квантиль Лапласа) при вероятности  $P/2$ , табличные значения которого указаны в приложении К.

При нормальном ЗРВ и малом количестве измерений  $n < 30$  множитель  $t$  равен коэффициенту Стьюдента, табличные значения которого указаны в приложении Л.

Для некоторых иных законов множитель  $t$  можно принять равным коэффициенту  $t_{zp}$ , определенному для расчета границ предельных значений по формуле (3.15) при исключении грубых погрешностей.

### 3.5 Определение доверительных границ неисключенной систематической погрешности результата измерения

Неисключенная систематическая погрешность результата образуется из составляющих, в качестве которых могут быть неисключенные систематические погрешности метода, средств измерений, а также вызванные другими источниками.

В качестве границ составляющих неисключенной систематической погрешности принимают, например, пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений, если случайные составляющие погрешности пренебрежимо малы.

При суммировании составляющих неисключенной систематической погрешности результата измерения неисключенные систематические погрешно-

сти средств измерения каждого типа и погрешности поправок рассматривают как случайные величины. При отсутствии данных о виде распределения случайных величин их распределения принимают за равномерные.

Границы неисключенной систематической погрешности  $\Theta$  результата измерения вычисляют путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей средств измерений, метода и погрешностей, вызванных другими источниками. При равномерном распределении неисключенных систематических погрешностей эти границы (без учета знака) можно вычислить по формуле

$$\Theta = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \Theta_i^2}, \quad (3.27)$$

где  $\Theta_i$  – граница  $i$ -й неисключенной систематической погрешности;  
 $k$  – коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью.

Коэффициент  $k$  принимают равным 1,1 при доверительной вероятности  $P = 0,95$ . При доверительной вероятности  $P = 0,99$  коэффициент  $k$  принимают равным 1,4, если число суммируемых неисключенных систематических погрешностей более четырех ( $m > 4$ ). Если же число суммируемых погрешностей равно четырем или менее четырех ( $m \leq 4$ ), то коэффициент  $k$  определяют по графику зависимости (рис. 3.3).

При трех или четырех слагаемых в качестве  $\Theta_1$  принимают составляющую, по числовому значению наиболее отличающуюся от других, в качестве  $\Theta_2$  следует принять ближайшую к  $\Theta_1$  составляющую.

Доверительную вероятность для вычисления границ неисключенной систематической погрешности принимают той же, что при вычислении доверительных границ случайной погрешности результата измерения.

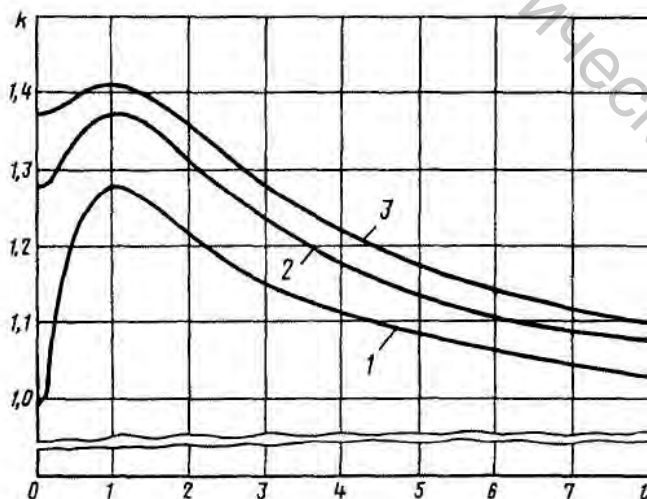


Рисунок 3.3 – График зависимости  $k = f(m, l)$ :

$m$  – число суммируемых погрешностей;  $l = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ ; кривая 1 –  $m = 2$ ;

кривая 2 –  $m = 3$ ; кривая 3 –  $m = 4$

Примеры расчета неисключенной систематической погрешности представлены в работе [12, с. 14].

### 3.6 Определение границ погрешности результата измерения

Для суммирования границ погрешности результат измерения необходимо найти значение отношения  $\frac{\Theta}{S_{\bar{x}}}$ .

В случае, если отношение  $\frac{\Theta}{S_{\bar{x}}} < 0,8$ , то неисключенными систематическими погрешностями по сравнению со случайными пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата  $\Delta = \varepsilon$ .

Если  $\frac{\Theta}{S_{\bar{x}}} > 8$ , то случайной погрешностью по сравнению с систематическими пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата  $\Delta = \Theta$ .

В случае, если указанные неравенства не выполняются, то границу погрешности результата измерения следует вычислить по формуле:

$$\Delta = K S_{\Sigma}, \quad (3.28)$$

где  $K$  – коэффициент, зависящий от соотношения случайной и неисключенной систематической погрешностей;

$S_{\Sigma}$  – оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения.

Оценку суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения вычисляют по формуле

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\Theta_i^2}{3} + S_{\bar{x}}^2}. \quad (3.29)$$

Коэффициент  $K$  вычисляют по эмпирической формуле

$$K = \frac{\varepsilon + \Theta}{S_{\bar{x}}^2 + \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\Theta_i^2}{3}}}. \quad (3.30)$$

Примеры суммирования границ погрешности результата измерения представлены в [12, с. 36].

Окончательный результат измерения необходимо представить в следующем виде:

$$X = (\bar{X} \pm \Delta) \text{ ед. изм. при } P = 0,95.$$



## 4 РАСЧЕТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ

Неопределенность – это параметр, связанный с результатом измерений, который характеризует разброс значений, которые могли бы обоснованно быть приписаны измеряемой величине.

При использовании *подхода причинно-следственного моделирования* процесс оценивания неопределенности состоит из следующих этапов:

### 1. Постановка измерительной задачи.

Для полного изложения измерительной задачи проводят изучение методики испытания. В соответствии со стандартом указывают:

- сущность метода;
- количество и размеры элементарных проб;
- климатические условия проведения испытаний;
- используемое оборудование и средства измерения (с указанием допускаемой погрешности измерения, цены деления или допускаемого отклонения от номинального значения).

### 2. Разработка математической модели измерения.

Любой процесс измерения можно представить в виде последовательности выполняемых операций. Поэтому для описания измеряемой величины и выявления источников неопределенности целесообразно представить цепь преобразования измеряемой величины в виде схемы, отображающей последовательность процесса измерений (рис. 4.1).

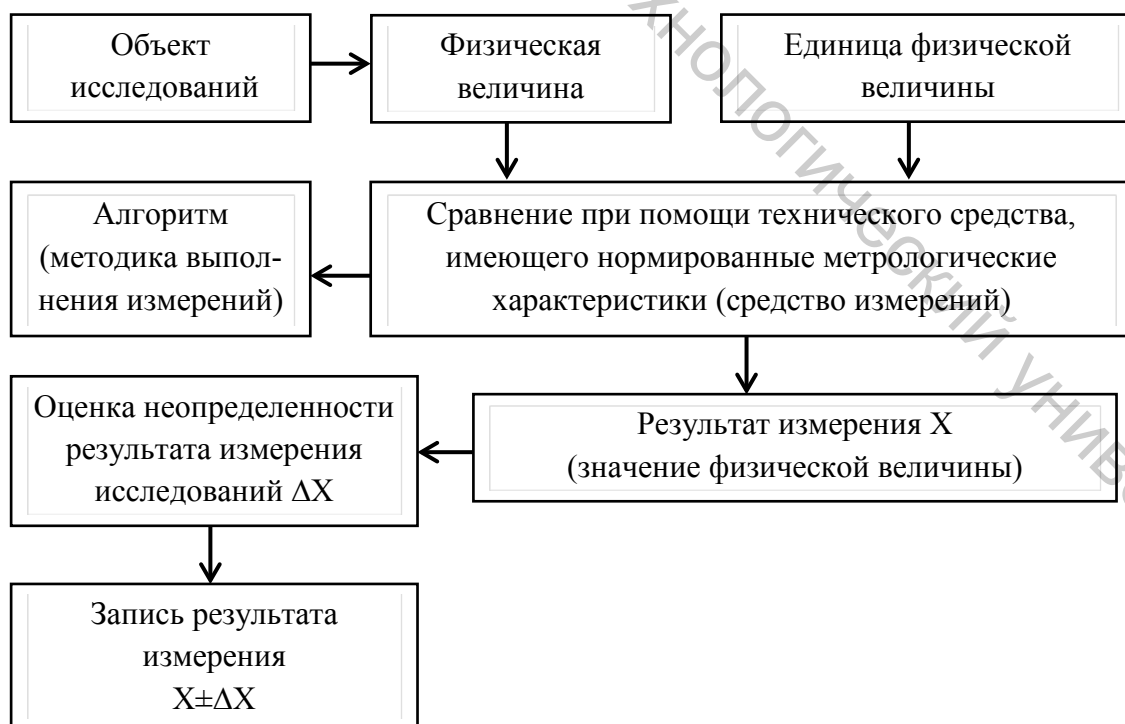


Рисунок 4.1 – Блок-схема процесса измерения

В большинстве случаев измеряемая величина  $Y$  не является прямо измеряемой, а зависит от  $N$  других измеряемых величин  $X_1, X_2 \dots X_N$  и выражается через функциональную зависимость

$$Y = f(X_1, X_2 \dots X_N), \quad (4.1)$$

где  $X_1, X_2, \dots X_N$  – входные величины;  
 $Y$  – выходная величина.

Входные величины  $X_1, X_2, \dots X_N$ , от которых зависит выходная величина  $Y$ , являются непосредственно измеряемыми величинами и сами могут зависеть от других величин, включая поправки и поправочные коэффициенты на систематические эффекты:

$$\begin{aligned} X_1 &= f(Z_1, Z_2 \dots Z_l) \\ X_2 &= f(W_1, W_2 \dots W_k) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Описание измеряемой величины в виде функциональной зависимости (математической модели), связывающей измеряемую величину с параметрами, от которых она зависит, называется моделированием.

С целью обобщения источников неопределенности измеряемую (выходную) величину и выявленные источники неопределенности: входные величины и величины, на них влияющие, целесообразно представить в виде диаграммы «причина – следствие» (рис. 4.2). Примеры диаграмм «причины-следствия» представлены в [14, с. 44, 47, 52, 55, 57, 63, 66, 104, 105].

Источниками неопределенности могут быть: пробоотбор, условия хранения, аппаратные эффекты, чистота реактивов, условия измерений, влияние пробы, вычислительные и случайные эффекты, влияние оператора, округление результатов и т. п.

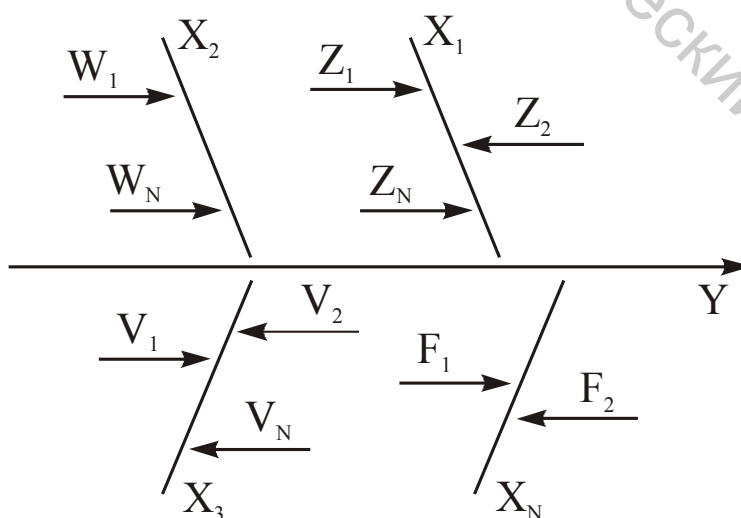


Рисунок 4.2 – Диаграмма «причина-следствие»

Указанные на схеме входные величины вносят в таблицу 4.1 с указанием применяемых условных обозначений, единиц измерений и краткого определения или описания.

На основании анализа входных величин, принимая во внимание методику измерения (испытания), записывают математическую модель для оценивания неопределенности результата измерения.

Таблица 4.1 – Перечень входных величин

Наименование величины, обозначение, ед. изм.	Определение или описание

### 3. Результаты измерений.

Результаты измерений представляют в виде таблицы, полученные в соответствии со стандартной методикой.

### 4. Анализ и количественная оценка входных величин и их неопределенностей.

Следующим этапом после выявления источников неопределенности является количественное описание неопределенностей, возникающих от этих источников. Это может быть сделано двумя путями:

- оцениванием неопределенности, возникающей от каждого отдельного источника с последующим суммированием составляющих;
- непосредственным определением суммарного вклада в неопределенность от некоторых или всех источников с использованием данных внутрилабораторных или межлабораторных исследований об эффективности метода в целом.

Для каждой входной величины необходимо определить оценку и стандартную неопределенность. При этом все входные величины вследствие того, что их значения не могут быть точно известны, являются случайными непрерывными. Тогда оценками входных величин ( $x_1, x_2 \dots x_N$ ) являются их математические ожидания, а стандартными неопределенностями  $u(x_i)$  входных величин – стандартные отклонения (или СКО). Оценку входных величин и связанную с ней стандартную неопределенность  $u(x_i)$  получают из закона распределения вероятностей входной величины.

Различают два *типа* вычисления стандартной неопределенности:

- **вычисление по типу А** ( $u_A$ ) – путем статистического анализа результатов многократных измерений (применяется хорошо развитый математический аппарат теории вероятностей и математической статистики);
- **вычисление по типу В** ( $u_B$ ) – с использованием других способов.

Исходными данными для вычисления  $u_A$  являются результаты многократных измерений  $x_1, x_2 \dots, x_n$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Стандартную неопределенность единичного измерения  $i$ -й входной вели-

чины  $u_{A,i}$  вычисляют по формуле

$$u_{A,i} = \sqrt{\frac{1}{n_i - 1} \sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}, \quad (4.3)$$

где  $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} x_{iq}$  – среднее арифметическое результатов измерений  $i$ -й входной величины.

Стандартную неопределенность  $u_A(x_i)$  измерений  $i$ -й входной величины, при которых результат определяют как среднее арифметическое, вычисляют по формуле

$$u_A(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i - 1)} \sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}. \quad (4.4)$$

В качестве исходных данных для вычисления  $u_B$  используют:

- данные предшествовавших измерений величин, входящих в уравнение измерения;
- сведения о виде распределения вероятностей;
- данные, основанные на опыте исследователя или общих знаниях о поведении и свойствах соответствующих средств измерений и материалов;
- неопределенности констант и справочных данных;
- данные поверки, калибровки, сведения изготовителя о средстве измерения и др.

Неопределенности этих данных обычно представляют в виде границ отклонения значения величины от ее оценки. Имеющуюся информацию о величинах необходимо правильно описать с помощью функции распределения вероятностей. Для определения стандартной неопределенности входных величин необходимо воспользоваться законом распределения вероятностей анализируемой величины  $x_i$ . Наиболее распространенный способ формализации неполного знания о значении величины заключается в постулировании равномерного закона распределения возможных значений этой величины в указанных (нижней и верхней) границах  $[(b_{i-}, b_{i+}]$  для  $i$ -й входной величины. При этом стандартную неопределенность, вычисляемую по типу В –  $u_B(x_i)$ , определяют по формуле

$$u_B(x_i) = \frac{b_{i+} - b_{i-}}{2\sqrt{3}} \quad (4.5)$$

а для симметричных границ  $(\pm b_i)$  – по формуле

$$u_B(x_i) = \frac{b_i}{\sqrt{3}}. \quad (4.6)$$

Применение прямоугольного распределения является разумным по умол-

чанию при отсутствии любой другой информации. Но если известно, что значения рассматриваемой величины более вероятны у центра, чем у границ интервала, будет лучшим вариантом использование треугольного или нормального распределения. В случае других законов распределения формулы для вычисления неопределенности по типу В будут иными [14].

Результаты анализа входных величин целесообразно представить в виде таблицы 4.2.

Таблица 4.2 – Анализ входных величин

Входная величина: <u>наименование, обозначение, единица измерения</u>	Тип оценивания неопределенности: <u>А или В</u> Вид распределения: _____ Значение оценки: _____ Интервал, в котором находится значение входной величины : _____ Стандартная неопределенность: _____
Краткое описание того, откуда и на основании каких предположений и предпосылок получены вышеперечисленные данные, или указание источников получения вышеперечисленных данных (справочник, свидетельство о калибровке, технические условия, паспорт на средство измерений и т. п.). Приводятся все промежуточные вычисления!!!	

### 5. Корреляции.

Проводят анализ входных величин на предмет их корреляции и рассчитывают коэффициенты корреляции для всех коррелированных входных величин с указанием методов их расчета.

Две входные величины могут быть независимы или связаны между собой (коррелированы). В концепции неопределенности имеется в виду корреляция «логическая», а не математическая. Например, может существовать значительная корреляция между двумя входными величинами, если при их определении используют один и тот же измерительный прибор, физический эталон или справочные данные, имеющие значительную стандартную неопределенность.

Мерой взаимной корреляции двух случайных величин является ковариация. Если две входные величины  $x_i$  и  $x_j$  являются коррелированными, т. е. зависимыми друг от друга, то при оценивании суммарной стандартной неопределенности должна учитываться их ковариация  $u(x_i, x_j)$ , которая оценивается по следующей формуле:

$$u(x_i, x_j) = u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \text{ при } (i \neq j), \quad (4.7)$$

где  $u(x_i)$ ,  $u(x_j)$  – стандартные неопределенности;

$r(x_i, x_j)$  – коэффициент корреляции.

Для расчета коэффициента корреляции используются согласованные пары измерений  $(x_{ik}, x_{jk})$ ,  $k = 1, \dots, n$ :

$$r(x_i, x_j) = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)^2 \sum_{k=1}^n (x_{jk} - \bar{x}_j)^2}}. \quad (4.8)$$

#### б. Суммарная стандартная неопределенность.

Стандартная неопределенность выходной величины  $Y$  представляет собой стандартное отклонение оценки выходной величины или результата измерения и характеризует разброс значений, которые могут быть с достаточным основанием приписаны измеряемой величине. Определяется суммированием стандартной неопределенности входных величин  $u(x_i)$  и является суммарной, или комбинированной стандартной неопределенностью, обозначаемой  $u_c(y)$ .

Суммарная стандартная неопределенность рассчитывается по формуле:

– в случае некоррелированных входных величин

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (c_i)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(y)}, \quad (4.9)$$

– в случае коррелированных входных величин

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(y) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N u_i(y) u_j(y) r(x_i, x_j)}, \quad (4.10)$$

где  $c_i$  – коэффициенты чувствительности (частная производная функции  $f$  по аргументу  $x_i$ );

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{x_1, x_2, \dots, x_m}$$

где  $u(x_i)$  – стандартная неопределенность, оцененная по типу А или В.

$r(x_i, x_j)$  определяется по формуле (4.8).

$u_i(y)$  – вклад в стандартную неопределенность, связанную с оценкой  $y$  выходной величины, который получается из стандартной неопределенности, связанной с оценкой входной величины  $x_i$ , по следующей формуле:

$$u_i(y) = c_i u(x_i). \quad (4.11)$$

Если функция модели  $f$  является суммой или разностью некоррелированных входных величин  $X_i$ , то коэффициенты чувствительности, равные множителям  $p_i$ , приводят равенство (4.9) к виду:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2 u^2(x_i)}. \quad (4.12)$$

Если функция модели  $f$  является произведением или отношением некоррелированных входных величин  $X_i$ , то в этом случае уравнение (4.9) можно представить в виде:

$$\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{p_i u(x_i)}{x_i} \right]^2}. \quad (4.13)$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнение (3.7), но с суммарной стандартной неопределенностью, выраженной как относительная суммарная стандартная неопределенность  $u_c(y) / |y|$  ( $|y| \neq 0$ ) и стандартными неопределенностями входных величин  $u(x_i)$ , выраженных как относительные стандартные неопределенности  $u(x_i) / |x_i|$  ( $|x_i| \neq 0$ ).

#### 7. Бюджет неопределенности.

Бюджет неопределенности представляют в виде таблицы 4.3.

Таблица 4.3 – Бюджет неопределенности

Величина $X_i$	Единица измерений	Значение оценки, $x_j$	Интервал	Тип неопределенности	Вид распределения вероятностей	Стандартная неопределенность, $u(x_i)$	Коэффициент чувствительности, $c_i$	Вклад неопределенности $u_i(y)$	Процентный вклад, %
$X_1$		$x_1$				$u(x_1)$	$c_1$	$u_1(y)$	
...		...				...	...		
$X_n$		$x_n$				$u(x_n)$	$c_n$	$u_n(y)$	
$Y$		$y$				$u(y)$			

#### 8. Расширенная неопределенность.

Проводят расчет расширенной неопределенности, предварительно определив коэффициент охвата на основе выбранного уровня доверительной вероятности.

Расширенную неопределенность  $U$  получают путем умножения стандартной неопределенности выходной величины  $u_c(y)$  на коэффициент охвата  $k$

$$U = k u_c(y). \quad (4.14)$$

Коэффициент охвата  $k$  при оценивании расширенной неопределенности выбирают в соответствии со следующими рекомендациями.

В случаях, когда измеряемой величине может приписываться нормальное распределение вероятностей, коэффициент охвата  $k$  определяется как квантиль нормированного нормального распределения при уровне доверия  $P$  (табл. 4.4).

Таблица 4.4 – Значения коэффициента охвата  $k$  при уровне доверия  $P$

Уровень доверия $P$ , %	Коэффициент охвата, $k$
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

Часто на практике принимают  $k = 2$  для интервала, имеющего уровень доверия  $P = 95$  %, и  $k = 3$  для интервала, имеющего уровень доверия  $P = 99$  %.

#### 9. Полный результат измерений.

Представляют полный результат измерений, состоящий из оценки  $y$  измеряемой величины  $Y$  и расширенной неопределенности  $U$  в форме  $Y = y \pm U$  с указанием единиц измерений для  $Y$  и  $y$ .



## Список использованных источников

1. Тюрин, Н. И. Введение в метрологию : учебное пособие / Н. И. Тюрин. – Москва : Издательство стандартов, 1985. – 248 с.
2. Новицкий, П. В. Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – Ленинград: Энергоиздат, 1991. – 304 с.
3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей : учебник для вузов / Е. С. Вентцель. – Москва: Высшая школа, 2001. – 575 с.
4. Ефремова, Н. Ю. Оценка неопределенности в измерениях: практическое пособие / Н. Ю. Ефремова. – Минск: БелГИМ, 2003. – 50 с.
5. Айзенберг, П. Г. Технологические измерения и контрольно-измерительные приборы / Л. Г. Айзенберг, А. В. Кипнис, Ю. И. Стороженко. – Москва : Легпромиздат, 1990. – 355 с.
6. Болтон, У. Карманный справочник инженера-метролога / У. Болтон. – Москва: Издательский дом «Додэка-XXI», 2002. – 384 с.
7. Карташова, А. Н. Технологические измерения и приборы в текстильной и легкой промышленности : учебник для вузов / А. Н. Каташова, И. В. Дунин-Барковский. – Москва: Легкая и пищевая промышленность, 1984. – 312 с.
8. Ким, К. К. Метрология, стандартизация, сертификация и электроизмерительная техника: учебное пособие / К. К. Ким, Г. Н. Анисимов, В. Ю. Барбарович. – Санкт-Петербург : Питер, 2006. – 367 с.
9. Фарзани, Н. Г. Технологические измерения и приборы : учеб. для студ. вузов по спец. «Автоматизация технологических процессов и производств» / Н. Г. Фарзани, Л. В. Илясов, А. Ю. Азимзаде. – Москва : Высшая школа, 1989. – 456 с.
10. Цербс, М. Контрольно-измерительная техника / М. Цербс. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 320 с.
11. Измерения в промышленности : справочник. В 3 т. ; пер. с нем. / под ред. П. Профоса. – Москва : Металлургия, 1990. – 492, 384, 344 с.
12. Петюль, И. А. Теоретическая метрология: методические указания к практическим занятиям / сост. И. А. Петюль, В. Д. Борозна. – 2-е изд., стер. – Витебск: УО «ВГТУ», 2019. – 66 с.
13. Шишкин, И. Ф. Теоретическая метрология : учеб. для вузов. В 2 ч. Ч. 1. Общая теория измерений / И. Ф. Шишкин. – 4-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург : Питер, 2010. – 192 с.: ил.
14. Руководство ЕВРАХИМ/СИТАК. Количественное описание неопределенности в аналитических измерениях / пер. с англ. Р. Л. Кадиса, Г. Р. Нежиховского, В. Б. Симины; под общ. ред. Л. А. Конопелько. – Санкт-Петербург: ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 2002. – 149 с.
15. Государственная система обеспечения единства измерений. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений»: РМГ 43-2001; введ. РБ 01.07.2003. – Минск: Госстандарт: Стандартинформ, 2005. – 24 с.
16. Государственная система обеспечения единства измерений. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения ; ГОСТ 8.207-76; введ. РБ 01.01.77. – Минск: Стандартинформ, 2006. – 8 с.

**Приложение А**  
**Форма бланка задания**

Учреждение образования  
«Витебский государственный технологический университет»

**Факультет** производственных технологий  
**Кафедра** «Техническое регулирование и товароведение»

УТВЕРЖДАЮ

**Зав. кафедрой** «ТР и Т»

\_\_\_\_\_ А. Н. Буркин  
(подпись)

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_ г.

**ЗАДАНИЕ**  
**к курсовому проектированию**

**Студенту(ке)** Иванову Петру Павловичу  
(фамилия, имя, отчество полностью)

**1. Тема курсовой работы:** « Обработка результатов многократных измерений»

**2. Сроки сдачи студентом законченного проекта** «07» декабря 2021 г.

**3. Исходные данные к курсовой работе:** массив результатов многократных измерений массы на весах типа ВЛА-200 г, ГОСТ 9913-90 «Материалы текстильные. Методы определения стойкости к истиранию»

**4. Содержание расчетно-пояснительной записки**

Введение

1. Изучение конструкции средства измерения

2. Определение результата многократного измерения физической величины

2.1 Определение точечных оценок закона распределения результатов измерения

2.2 Исключение грубых погрешностей

2.3 Определение закона распределения вероятности результатов измерений

2.4 Определение доверительных границ случайной погрешности результата измерения

2.5 Определение доверительных границ неисключенной систематической погрешности результата измерения

2.6 Определение границ погрешности результата измерения

3 Оценивание неопределенности результата измерения

Заключение

Приложения (при наличии)

**5. Характеристика графического материала и/или презентации** (при наличии)

12 таблиц, 3 рисунка

## 6. Руководитель курсового проектирования

(должность, фамилия, инициалы)

## 7. Календарный график курсового проектирования

№	Содержание этапа работы	Сроки выполнения	Подпись или замечания руководителя
1	Разработка плана курсовой работы	01.09.2021–06.09.2021	
2	Изучение литературных источников по теме, написание введения	07.09.2021–19.09.2021	
3	Выполнение первого раздела курсовой работы	21.09.2021–04.10.2021	
4	Выполнение второго раздела курсовой работы	05.10.2021–01.11.2021	
5	Выполнение третьего раздела курсовой работы	02.11.2021–29.11.2021	
6	Подготовка заключения и оформление курсовой работы	30.11.2021–06.12.2021	
7	Представление на окончательную проверку курсовой работы руководителю	за две недели до начала сессии	
8	Защита курсовой работы	на заключительной неделе	

**РУКОВОДИТЕЛЬ** \_\_\_\_\_

(подпись)

Задание принял(а) к исполнению « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г. \_\_\_\_\_  
(дата и подпись студента)

**Приложения Б**  
**Форма титульного листа**

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Витебский государственный технологический университет»

Кафедра «Техническое регулирование  
и товароведение»

# КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине «Теоретическая метрология»  
на тему «Обработка результатов многократных измерений»

**Вариант** \_\_\_\_\_

*Выполнил:*

студент группы \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ Ф.И.О.  
*подпись*  
« \_\_\_\_\_ » 20\_\_ г.  
*дата*

*Проверил:*

руководитель

\_\_\_\_\_ Ф.И.О.  
*должность*

\_\_\_\_\_ *отметка о допуске к защите*

\_\_\_\_\_ *отметка о допуске к защите*

\_\_\_\_\_ *подписи членов комиссии*

« \_\_\_\_\_ » 20\_\_ г.  
*дата*

\_\_\_\_\_ *подпись руководителя*

« \_\_\_\_\_ » 20\_\_ г.  
*дата*

Витебск, 20\_\_

## Приложение В

### Пример описания конструкции средства измерения

#### 1 Изучение конструкции средства измерения

Температура – один из важнейших параметров технологических процессов в текстильной и легкой промышленности. Для проведения технологического процесса в оптимальном режиме приходится контролировать и регулировать температуру разнообразных сред:

- газовой (помещение цеха или склада, сушильная и т. д.);
- паровой (запарная, сушильная и т. д.);
- жидкостной (вода, водные растворы красителей, растворы, применяемые при обработки кожевенного сырья и т. д.);
- твердой (поверхность плиты гладильного пресса, поверхность сушильных барабанов и каландров, движущееся полотно ткани, машины для затяжки пяточной части и т. д.).

В зависимости от принципа действия приборы для измерения температуры делятся на следующие подгруппы:

- термометры расширения (от  $-200\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $+750\text{ }^{\circ}\text{C}$ );
- манометрические термометры (от  $-200\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $+1000\text{ }^{\circ}\text{C}$ );
- термоэлектрические термометры (термопары) (от  $-200\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $+2500\text{ }^{\circ}\text{C}$ );
- электрические термометры сопротивления (от  $-260\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $+1100\text{ }^{\circ}\text{C}$ );
- пирометры излучения (от  $-100\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $+8000\text{ }^{\circ}\text{C}$ ).

Согласно заданию по курсовой работе рассмотрим термометры манометрические.

Термометры манометрические изготавливают согласно ГОСТ 16920-93 «Термометры и преобразователи температуры манометрические. Общие технические требования и методы испытаний».

По способу выдачи измерительной информации термометры подразделяются на: показывающие, самопишущие, комбинированные (показывающие и самопишущие).

Термометр состоит из термобаллона 1, капиллярной трубки 2, манометрической трубчатой пружины 5 и передаточного механизма 3–4. Вся система прибора (термобаллон, капилляр и манометрическая пружина) заполнена рабочим веществом. Кинематическая схема представлена на рисунке В.1.

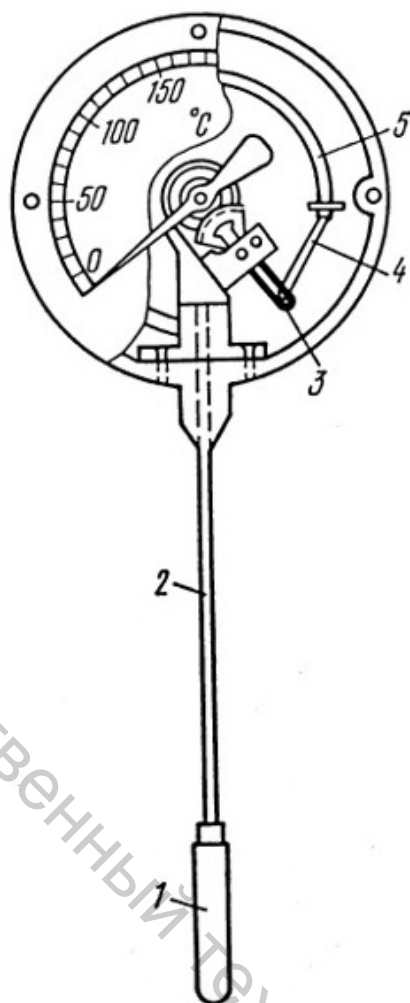


Рисунок В.1 – Кинематическая схема термометра манометрического:  
 1 – термобаллон; 2 – капиллярная трубка; 3, 4 – передаточный механизм;  
 5 – манометрическая трубчатая пружина

Принцип их действия основан на изменении давления газа, жидкости или пара в замкнутой системе при изменении температуры.

В качестве рабочего вещества применяют азот (газозаполненные или газовые, термометры), ртуть или ксилол (жидкозаполненные, или жидкостные, термометры). В парожидкостных термометрах термобаллон заполняется на  $\frac{2}{3}$  объема жидкостью с низкой температурой кипения, а остальное пространство заполнено парами этой жидкости. Термобаллон помещают в зону, где нужно измерить температуру. При нагревании термобаллона давление рабочего вещества внутри замкнутой системы увеличивается. Увеличение давления воспринимается манометрической трубчатой пружиной, которая воздействует через передаточный механизм на стрелку или перо самописца прибора. Длина капиллярной трубки может составлять от 1 до 30 м.

Область измерений термометров в зависимости от заполнителя термосистемы устанавливают в соответствии с таблицей В.1.

Таблица В.1 – Область измерений манометрических термометров

Заполнитель термосистемы	Область измерений, °С
Газ	от -200 до +800
Жидкость	от -150 до +400
Конденсат	от -50 до 300

Термометры манометрические изготавливают следующих классов точности:

0,6; 1; 1,5; 2,5 – для показывающих термометров с газовым и жидкостным заполнителем термосистемы;

0,6; 1; 1,5 – для самопишущих термометров с газовым и жидкостным заполнителем термосистемы;

1; 1,5; 2,5 – для термометров с конденсационными заполнителями термосистемы, при этом класс устанавливают для последних 2/3 температурной шкалы, а для первой 1/3 шкалы класс точности не должен быть ниже следующего за ним класса точности или по заказу потребителя его допускается для этой части шкалы не регламентировать.

Предел допускаемой основной погрешности показаний термометров должен соответствовать значениям, указанным в таблице В.2.

Таблица В.2 – Предел допускаемой основной погрешности

Класс точности	Предел допускаемой основной погрешности, % от диапазона измерений	
	показаний	выходного сигнала
0,4	±0,4	±0,5
0,5	±0,5	±0,6
0,6	±0,6	±1,0
1	±1,0	±1,5
1,5	±1,5	±2,5
2,5	±2,5	±4,0

Предел допускаемой дополнительной погрешности показаний термометров в процентах от диапазона измерений, от изменения температуры окружающего воздуха на каждые 10 °С (и на каждый метр дистанционного капилляра) не должна превышать значений, указанных в таблице В.3.

Таблица В.3 – Пределы допускаемой дополнительной погрешности от изменения температуры

Заполнитель среды	Термометр	
	с жесткой связью	с гибкой связью
Газ	±0,5	0,015
Жидкость	±0,8	0,02
Конденсат	±0,4	0,01

Согласно заданию курсовой работы, был выбран термометр манометрический ТКП-100С с метрологическими и техническими требованиями, пред-

ставленными в таблице В.4. Внешний вид средства измерения представлен на рисунке В.2.



Рисунок В.2 – Внешний вид термометра ТКП-100С

Таблица В.4 – Метрологические и технические требования термометра ТКП-100С

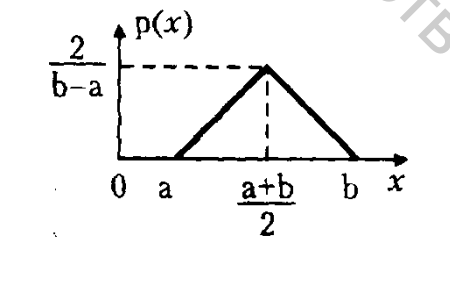
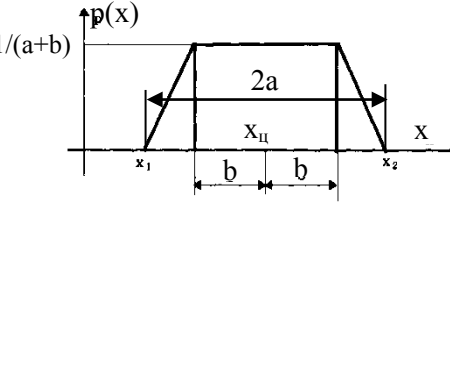
Технические характеристики	Значение
Пределы измерений, °С	0...120
Заполнитель термосистемы	Хладон 22 Метил хлористый Ацетон Толуол
Класс точности	2,5
Диаметр термобаллона, мм	12
Длина соединительного капилляра, м	1,6
Длина погружения термобаллона, мм	200
Вид защитной оболочки капилляра	медная-А
Масса, не более, кг	1,25

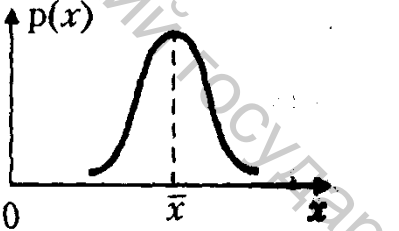
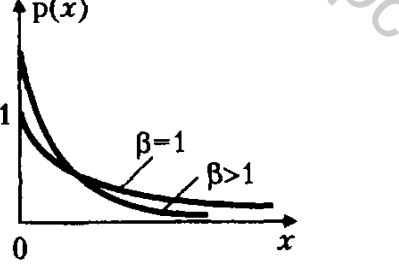
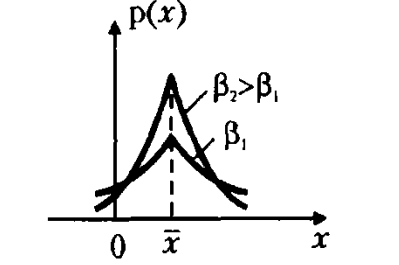
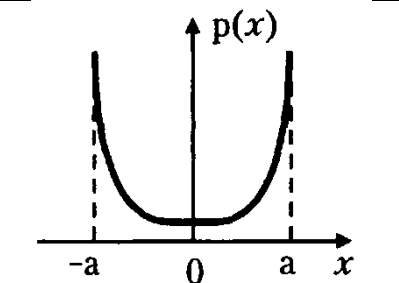
Шкала прибора неравномерна. Цена деления 2 °С.

Манометрические термометры просты по устройству, надежны в работе, имеют равномерную шкалу, позволяют производить измерения температуры на большом расстоянии. К их недостаткам следует отнести сравнительно большую инерционность и влияние колебаний температуры окружающей среды на показания.



**Приложение Г**  
**Некоторые теоретические законы распределения вероятности**

Закон	График плотности вероятности	Дифференциальная функция	Интегральная функция
Равномерный		$p(x) = \frac{1}{b-a}, a < x < b$	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$
Треугольный (Симпсона)		$p(x) = \begin{cases} \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a < x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2} < x < b \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a, \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a < x < \frac{a+b}{2} \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2} < x < b, \\ 1, & b < x < \infty \end{cases}$
Трапецеидальный		$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq X_u - a, x \geq X_u + a \\ \frac{x - X_u + a}{a^2 - b^2}, & X_u - a \leq x \leq X_u - b \\ \frac{1}{a+b}, & X_u - b \leq x \leq X_u + b \\ \frac{X_u + a - x}{a^2 - b^2}, & X_u + b \leq x \leq X_u + a \end{cases}$	

Нормальный (Гауса)		$p(x) = \frac{1}{S_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2S_x^2}}$	$F(x_0) = \frac{1}{S_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2S_x^2}} dx$
Экспоненциальный одно- сторонний		$p(x) = \beta e^{-\beta x}$	$F(x) = 1 - e^{-\beta x}$
Экспоненциальный двух- сторонний (Лапласа)		$p(x) = \frac{\beta}{2} e^{-\beta x - \bar{x} }$	$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\beta x - \bar{x} }, & -\infty \leq x \leq \bar{x} \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\beta x - \bar{x} }, & \bar{x} \leq x \leq \infty \end{cases}$
Арксинуса		$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}$	$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}$

**Приложение Д**  
**Интегральная функция распределения Пирсона. Значение  $\chi^2_{k,p}$  для различных  $k$  и  $P$**   
**Интегральная функция  $\chi^2$  – распределения Пирсона.**  
**Значения  $\chi^2_{k;p}$  для различных  $k$  и  $p$**

<b><math>k</math></b>	<b><math>P</math></b>												
	<b>0,01</b>	<b>0,02</b>	<b>0,05</b>	<b>0,10</b>	<b>0,20</b>	<b>0,30</b>	<b>0,50</b>	<b>0,70</b>	<b>0,80</b>	<b>0,90</b>	<b>0,95</b>	<b>0,98</b>	<b>0,99</b>
1	0,0002	0,0006	0,0039	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141

**Приложение Е**  
**Значения функции Лапласа**

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4813	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4874	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4986	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
4,0	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999

Функция Лапласа :  $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .  $F(t) = 0,5 + \Phi(t)$ , где  $F(t)$  – интегральная функция нормированного нормального распределения.

**Приложение Ж**  
**Статистика  $d$  для критерия 1**

$n$	$q_1/2 \cdot 100\%$		$(1-q_1/2) \cdot 100\%$	
	1%	5%	95%	99%
16	0,9137	0,8884	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,7360	0,7040
31	0,8826	0,8625	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,7518	0,7291

**Приложение И**  
**Значения  $P$  для вычисления критерия 2**

$n$	$m$	$q_2 \cdot 100\%$		
		1%	2%	5%
10	1	0,98	0,98	0,96
11-14	1	0,99	0,98	0,97
15-20	1	0,99	0,99	0,98
21-22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24-27	2	0,98	0,98	0,97
28-32	2	0,99	0,98	0,97
33-35	2	0,99	0,98	0,98
36-49	2	0,99	0,99	0,98

**Приложение К**  
**Интегральная функция нормального распределения.**  
**Значение  $z$  для различных  $\Phi(z)$**

$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$
0,0005	-3,2905	0,25	-0,6745	0,55	+0,1257	0,90	+1,2816
0,005	-2,5750	0,30	-0,5244	0,60	+0,2533	0,95	+1,6449
0,01	-2,3267	0,35	-0,3853	0,65	+0,3853	0,99	+2,3267
0,05	-1,6449	0,40	-0,2533	0,70	+0,5244	0,995	+2,5750
0,10	-1,2816	0,45	-0,1257	0,75	+0,6745	0,9995	+3,2905
0,15	-1,0364	0,50	-0,0000	0,80	+0,8416		
0,20	-0,8416	0,50	+0,0000	0,85	+1,0364		

**Приложение Л**  
**Значения распределения Стьюдента  $t$**

$k$	При доверительной вероятности $P$		
	<b>0,90</b>	<b>0,95</b>	<b>0,99</b>
2	6,31	12,71	63,68
3	2,92	4,30	9,93
4	2,35	3,18	5,84
5	2,13	2,78	4,60
6	2,02	2,57	4,06
7	1,94	2,45	3,71
8	1,90	2,37	3,50
9	1,86	2,31	3,36
10	1,83	2,26	3,25
11	1,81	2,23	3,17
12	1,80	2,20	3,11
13	1,78	2,18	3,06
14	1,77	2,16	3,01
15	1,76	2,15	2,98
16	1,75	2,13	2,95
17	1,75	2,12	2,92
18	1,74	2,11	2,90
19	1,73	2,10	2,88
20	1,73	2,09	2,86
$\infty$	1,65	1,96	2,58

Учебное издание

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ

Методические указания по выполнению курсовой работы

Составители:

Петюль Ирина Анатольевна  
Борозна Виля Дмитриевна

Редактор *Т.А. Осипова*  
Корректор *Т.А. Осипова*  
Компьютерная верстка *Н.В. Абазовская*

---

Подписано к печати 14.01.2022. Формат 60x90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. листов 2,9.  
Уч.-изд. листов 3,8. Тираж 35 экз. Заказ № 21.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»  
210038, г. Витебск, Московский пр., 72

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 3/11497 от 30 мая 2017 г.