

6. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Часть 2. Приложения.– СПб, НИИХ СПбГУ, 1999, 195 с.
7. Черных К.Ф. Комплексная нелинейная теория упругости // Успехи механики, Т. 1, №4, 2002, С. 121-161.
8. Черных К.Ф. На подступах к нелинейной физической мезомеханике.// Физическая мезомеханика, т.5, №2, 2002, С.5-15
9. Черных К.Ф. Нелинейная упругость (теория и приложения).– СПб, изд. СПбГУ (в печати)

УДК 519.248

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ЭМПИРИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЁТА ПРОГИБОВ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

Грибняк В. Т., Каслаускас Г. Г.

*Вильнюсский Технический Университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва,
bridge@st.vtu.lt*

Аннотация. В статье статистически оценивается точность различных методов расчёта прогибов железобетонных балок. В частности, рассмотрены эмпирические методы, используемые в американских (ACI), европейских (EC2) и российских (СНиП) нормативных документах, а также специализированный компьютерный пакет ATENA, использующий метод конечных элементов для численного моделирования железобетонных элементов, и итерационная процедура расчёта прогибов железобетонных элементов, предложенная вторым автором (Flexural).

Ключевые слова: Железобетонные балки, методы расчёта, статистический анализ

1. Введение

Инженеры для расчёта железобетонных конструкций могут использовать как традиционные методы, используемые в нормативных документах, так и методы численного моделирования и расчёта. Несмотря на то, что нормативные методы обеспечивают некоторую надёжность, они в малой мере отражают реальную физическую сущность напряжённо-деформированного состояния рассчитываемой конструкции, особенно в стадии образования трещин. Численные методы, получившие широкое развитие в последние десятилетия, опираются на универсальные методы расчёта и позволяют учитывать особенности нелинейного поведения материалов и конструкций в целом. Однако, выбирая тот или другой метод, инженер должен обладать уверенностью в точности выбранного метода.

В данной статье представлены результаты статистического анализа соответствия экспериментальным данным прогибов железобетонных балок, рассчитанных с использованием различных методов. Анализируются результаты расчёта с использованием американских (ACI), европейских (EC2) и российских (СНиП) нормативных методов, а также специализированного компьютерного пакета ATENA, использующего метод конечных элементов (КЭ) для численного моделирования железобетонных элементов, и

итерационной процедуры расчёта прогибов железобетонных элементов (Flexural), предложенной вторым автором.

2. Теоретические методы расчёта прогибов железобетонных балок

Американский нормативный метод (ACI) [1]. Кривизна железобетонного элемента определяется, согласно классической формуле:

$$\kappa = \frac{M}{E_c I} \quad (1)$$

Здесь произведение $E_c I$ является изгибной жёсткостью элемента. Значение модуля упругости бетона E_c в процессе расчёта не изменяется, в отличие от момента инерции сечения I , величина которого изменяется в зависимости от уровня нагрузки. Для элемента, работающего в упругой стадии (до возникновения трещин), момент инерции сечения I_g вычисляется без учёта влияния арматуры. При увеличении нагрузки до предела текучести арматуры момент инерции I_{cr} вычисляется, как для сечения с трещиной. Для нахождения момента инерции сечения для интервала нагрузки от возникновения трещин в бетоне и до достижения арматурой предела текучести используется следующая эмпирическая зависимость [2]:

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^3 \right] I_{cr} \quad (2)$$

В этой формуле M – внешний момент; $M_{cr} = f_r I_g / y_t$ – момент образования трещины; $f_r = 0,643 (f_c')^{1/4}$ [МПа] – модуль разрушения; y_t – расстояние от центра тяжести сечения до наиболее растянутого слоя; f_c' – цилиндрическая прочность бетона на сжатие.

Прогиб балки в центре расчётного пролёта l_0 может быть вычислен по формуле:

$$f = s \kappa l_0^2 \quad (3)$$

Здесь s – коэффициент, зависящий от схемы расположения нагрузки и характеристик опор; κ – кривизна элемента в расчётном сечении.

Европейский нормативный метод (EC2) [3]. В модели EC2 работа железобетонного элемента разделяется на два этапа: на I этапе элемент работает без трещин, на II этапе – с полностью сформировавшимися трещинами. На I этапе бетон и арматура работают совместно упруго. На II этапе арматура полностью перенимает растягивающие напряжения в сечении с трещиной. Общая кривизна в расчётном сечении, согласно EC2, вычисляется по формуле:

$$\kappa = (1 - \xi) \kappa_1 + \xi \kappa_2 \quad (4)$$

Здесь κ_1 и κ_2 – соответственно, кривизна в расчётном сечении на I и II этапах работы элемента. Коэффициент перераспределения ξ показывает, насколько близко напряжённо-деформированное состояние элемента к моменту возникновения трещин. Он равен 0, если трещины ещё не возникли, и приближается к 1 в процессе развития трещин. Этот коэффициент может быть определён из следующего соотношения:

$$\xi = \beta_1 \beta_2 (\sigma_w / \sigma_s)^2 \quad (5)$$

В этом выражении коэффициент β_1 учитывает особенности сцепления арматуры с бетоном, он принимается 1,0 – для рифлёной арматуры, 0,5 – для гладкой арматуры. Коэффициент β_2 оценивает особенности нагрузки; он принимается 1,0 – для кратковре-

менных нагрузок, 0,5 – для долговременных, либо циклических нагрузок. Напряжения в растянутой арматуре σ_s и σ_c вычисляются в сечении с трещиной, соответственно при её возникновении и при расчётной нагрузке.

Российский нормативный метод (СНиП) [4]. Кривизна железобетонного элемента с трещинами без предварительного напряжения выражается через относительные деформации в наиболее напряжённых слоях сечения:

$$\kappa = \frac{\varepsilon_{sm} + \varepsilon_{cm}}{h_0} = \frac{M}{zh_0} \left[\frac{\psi_s}{E_s A_s} + \frac{\psi_c}{(\xi + \varphi_f) \nu E_c b h_0} \right], \quad (6)$$

Здесь ε_{sm} и ε_{cm} – относительные деформации в растянутой арматуре и в наиболее сжатом слое бетона соответственно, а h_0 – эффективная высота сечения. M – внешний момент; z – расстояние между результирующими силами сжатой и растянутой частей сечения; ψ_s – соотношение между относительной деформацией арматуры ε_{sm} и деформацией арматуры в трещине ε_s ; ψ_c – аналогичное соотношение для сжатого бетона; A_s – площадь сечения растянутой арматуры; E_s и E_c – соответственно модули упругости стали и бетона; ξ – относительная высота сжатой зоны; ν – множитель, учитывающий пластические деформации в сжатом бетоне; φ_f – множитель, учитывающий влияние арматуры и полка в сжатой зоне Т-образного сечения.

Компьютерный пакет ATENA [5]. Специализированный компьютерный пакет ATENA был создан для моделирования и нелинейного анализа железобетонных элементов при помощи МКЭ, при этом могут учитываться следующие эффекты:

- нелинейное поведение материала при сжатии и растяжении с учётом ниспадающей ветви диаграммы напряжение-деформация;
- разрушение при растяжении на основе принципов механики разрушения;
- особенности двумерного напряженно-деформированного состояния;
- изменение прочностных характеристик при сжатии и сдвиге, вызванное образованием трещин, и различные модели их развития;
- особенности совместной работы бетона и арматуры между трещинами.

Процедура расчёта прогибов железобетонных элементов (Flexural) [6]. В основе процедуры расчёта лежит метод последовательных итераций. Расчётное сечение по высоте разделяется на слои, в каждом устанавливается действительное напряженно-деформированное состояние. Для моделирования поведения растянутого бетона, в зависимости от количества растягиваемой арматуры ρ , используется предложенная вторым автором зависимость напряжение-деформация [6]:

$$\begin{cases} \beta = 32.8 - 27.6\rho + 7.12\rho^2, & \rho < 2\% \\ \beta = 5, & \rho \geq 2\% \end{cases} \quad (7)$$

Здесь β – отношение между относительными деформациями, соответствующими полному раскрытию трещины и моменту её возникновения.

Использованная при создании процедуры методика при расчёте прогибов железобетонных балок позволяет учитывать ниспадающие ветви диаграмм напряжение-деформация как для сжимаемого, так и для растягиваемого бетона. Кроме того, в предложенной зависимости напряжение-деформация для растянутого бетона учитывается эффект от совместной работы бетона и арматуры между трещинами.

Прогибы балок рассчитываются с использованием интеграла Мора.

3. Экспериментальные данные, используемые для сравнительного статистического анализа

Экспериментальные образцы могут быть охарактеризованы как средне и мало армированные балки. Только пять балок из 49, использованных при анализе, обладают относительным армированием ρ свыше 1% (но не более 1,3%), а 22 балки – менее 0,7%. В данной работе значение относительного армирования 0,7% принято как предельное для мало армированных балок.

Все балки были шарнирно оперты по концам и загружены двумя равными концентрированными силами, находящимися на расстоянии $l_0/3$ от опор, l_0 – расчётный пролет. Эксперименты были выполнены несколькими авторами [7, 8, 9], характеристики испытанных балок представлены в Таблица 1.

Таблица 1. Основные параметры балок использованных при анализе

Автор	Количество	Пролёт, м	Высота, мм	Ширина, мм	ρ , %	R_b , МПа
Фигаровский [9]	30	3,0	248-254	179-181	0,20-1,26	10,5-36,0
Артемьев [7]	15	3,0	250-264	176-187	0,80-0,91	18,8-53,4
Гуща [8]	4	3,6	306-312	133-162	0,28-0,97	30,0-40,8

Значения прогибов, полученные экспериментально, сравнивались с величинами, рассчитанными с использованием указанных выше методик. Прогибы, по возможности, измерялись при пяти уровнях нагрузки F (было проведено 237 экспериментальных измерений), составляющих 40, 55, 60, 70 и 80% от теоретически рассчитанной несущей способности балки F_{ult} , и представленных в статье как относительная нагрузка:

$$\bar{F} = F/F_{ult} \quad (8)$$

4. Статистический анализ соответствия теоретически полученных значений прогибов экспериментальным данным

В этой части статьи статистически оценивается соответствие результатов расчёта с использованием анализируемых методов, экспериментально полученным прогибам железобетонных балок в среднем сечении. Точность расчёта оценивается с точки зрения относительной погрешности вычислений:

$$\Delta = f_{obs} / f_{cal} \quad (9)$$

Здесь f_{obs} и f_{cal} – соответственно, экспериментально и теоретически полученные значения прогибов.

Статистический анализ состоял из следующих этапов [10, 11]:

Проверка на наличие выбросов. Аномальные результаты наблюдений, называемые *выбросами*, могут оказать значительное влияние на результаты статистического анализа, заметно их исказив. По возможности, такие наблюдения должны быть исключены из анализа, иначе могут быть сделаны неточные либо ошибочные выводы. На основе методики [12], в представляемом анализе как выбросы были исключены три экспериментальные наблюдения.

Проверка результатов расчёта на однородность. Результаты статистического анализа, обладающие большой дисперсией, должны быть внимательно рассмотрены. Причиной возникновения непримлемо большого значения дисперсии может служить

то, что наблюдения распадаются на отдельные множества, группирующиеся около различных центров [12], поэтому необходима дополнительная проверка на однородность наблюдений.

Таблица 2. Точечные оценки математического ожидания μ_{Δ} и стандартного отклонения σ_{Δ}

Относительное армирование $\rho \leq 0,70\%$										
Интервал	$0,3 \leq \bar{F} < 0,4$		$0,4 \leq \bar{F} < 0,5$		$0,5 \leq \bar{F} < 0,6$		$0,6 \leq \bar{F} < 0,7$		$0,7 \leq \bar{F} < 0,9$	
Число измерений	19		30		21		16		17	
Оценки	m_{Δ}	s_{Δ}	m_{Δ}	s_{Δ}	m_{Δ}	s_{Δ}	m_{Δ}	s_{Δ}	m_{Δ}	s_{Δ}
АС1	1,290	0,269	1,124	0,307	0,995	0,239	0,949	0,159	0,868	0,105
ЕС2	1,458	0,261	1,452	0,333	1,165	0,202	1,076	0,163	0,989	0,148
СНнП	1,115	0,272	1,037	0,220	0,980	0,180	0,929	0,116	0,892	0,082
АТЕНА	1,540	0,362	1,415	0,267	1,194	0,185	1,086	0,121	1,028	0,090
Flexural	1,048	0,192	0,943	0,182	0,942	0,164	0,916	0,130	0,911	0,074
Относительное армирование $\rho > 0,70\%$										
Интервал	$0,3 \leq \bar{F} < 0,4$		$0,4 \leq \bar{F} < 0,5$		$0,5 \leq \bar{F} < 0,7$		$0,7 \leq \bar{F} < 0,8$		$0,8 \leq \bar{F} < 0,9$	
Число измерений	21		24		41		17		14	
Оценки	m_{Δ}	s_{Δ}	m_{Δ}	s_{Δ}	m_{Δ}	s_{Δ}	m_{Δ}	s_{Δ}	m_{Δ}	s_{Δ}
АС1	1,224	0,271	1,073	0,134	0,966	0,055	0,903	0,040	0,869	0,057
ЕС2	1,116	0,239	0,984	0,128	0,900	0,060	0,851	0,041	0,822	0,058
СНнП	0,971	0,175	1,008	0,124	1,005	0,084	0,851	0,041	0,822	0,058
АТЕНА	1,076	0,212	1,027	0,122	0,990	0,078	0,992	0,061	0,992	0,098
Flexural	0,950	0,179	0,976	0,124	0,960	0,082	0,954	0,055	0,938	0,076

Первоначально статистический анализ был проведён на всём множестве наблюдений (общее количество, без выбросов, $N = 234$ измерения). Для всех, без исключения, методов расчёта была установлена чрезвычайно большая дисперсия. Поэтому все измерения были разделены на два больших множества по величине относительного армирования экспериментальной балки, а затем, внутри этих множеств объединены в 6 групп, в зависимости от величины относительной нагрузки (8):

$$\begin{aligned} 1: & 0,3 \leq \bar{F} < 0,4; \quad 2: 0,4 \leq \bar{F} < 0,5; \quad 3: 0,5 \leq \bar{F} < 0,6; \\ 4: & 0,6 \leq \bar{F} < 0,7; \quad 5: 0,7 \leq \bar{F} < 0,8; \quad 6: 0,8 \leq \bar{F} \leq 0,9. \end{aligned} \quad (10)$$

14 экспериментальных измерений, проводившихся при относительной нагрузке, выходящей за границы интервала $[0,3; 0,9]$, были исключены из дальнейшего анализа.

Если для измерений, расположенных в соседних интервалах по \bar{F} , с уровнем значимости $\alpha = 0,10$, стандартное отклонение σ_{Δ} и математическое ожидание μ_{Δ} могли быть приняты одинаковыми, то эти интервалы объединялись. Статистические оценки для полученных после объединения интервалов представлены в Таблица 2.

Проверка нормальности вероятностного распределения относительной погрешности Δ . Используя статистические процедуры, для каждого из указанных выше методов расчёта была выполнена проверка нормальности вероятностного распределения относительной погрешности. Подробности данной проверки в данной статье не представлены. В результате проверки можно заключить, что, фактически, для всех ме-

тодов расчёта прогибов вероятностное распределение относительной погрешности Δ (9) подчиняется закону нормального распределения.

Статистический анализ дисперсии и математического ожидания. Минимальность значения дисперсии σ_{Δ}^2 при сравнении различных методов расчёта прогибов расценивается как критерий *точности метода* [12]. Парный сравнительный анализ дисперсий был выполнен для всех методов расчёта в отдельных группах, в зависимости от величины относительного армирования ρ и относительной нагрузки F^* (см. Табл. 3).

Таблица 3. Результаты парного сравнительного анализа дисперсий σ_{Δ}^2 (при уровне значимости $\alpha=0,10$)

		Относительное армирование $\rho \leq 0,70\%$																													
		ACI					EC2					СНиП					ATENA					Flexural									
Интервал		1	2	3	4	5-6	1	2	3	4	5-6	1	2	3	4	5-6	1	2	3	4	5-6	1	2	3	4	5-6					
ACI																															
EC2		:	:	=	:	>	:	:	=	:	<	:	:	=	:	>	:	:	=	:	>	:	:	=	:	>	:	:	=	:	>
СНиП		:	<	=	:	=	:	<	=	:	<	:	:	=	:	>	:	:	=	:	=	:	:	=	:	=	:	:	=	:	=
ATENA		:	:	=	:	=	:	:	=	:	<	:	:	=	:	>	:	:	=	:	=	:	:	=	:	=	:	:	=	:	=
Flexural		<	<	<	>	<	:	:	=	:	<	<	:	:	:	=	<	<	:	:	=	<	<	:	:	=	<	<	:	:	=

		Относительное армирование $\rho > 0,70\%$																													
		ACI					EC2					СНиП					ATENA					Flexural									
Интервал		1	2	3-4	5	6	1	2	3-4	5	6	1	2	3-4	5	6	1	2	3-4	5	6	1	2	3-4	5	6					
ACI																															
EC2		:	:	=	:	=	:	:	=	:	=	:	:	=	:	=	:	:	=	:	=	:	:	=	:	=	:	:	=	:	=
СНиП		<	:	>	:	=	<	:	>	:	=	<	:	>	:	=	<	:	>	:	=	<	:	>	:	=	<	:	>	:	=
ATENA		:	:	>	>	>	:	:	>	>	>	:	:	=	:	>	:	:	=	:	>	:	:	=	:	>	:	:	=	:	>
Flexural		<	:	>	:	=	:	:	>	:	=	:	:	=	:	=	:	:	=	:	=	:	:	=	:	=	:	:	=	:	=

Математическое ожидание может рассматриваться как показатель *точности результата* [12]. В нашем случае математическое ожидание должно быть равно единице. Как статистическая гипотеза ($H_0: \mu_{\Delta}=1$, при альтернативе $H_1: \mu_{\Delta} \neq 1$), при уровне значимости $\alpha=0,10$, это утверждение было проверено для всех методов расчёта в отдельных группах в зависимости от величины относительного армирования ρ и относительной нагрузки F^* (см. Таблица 4).

Таблица 4. Результаты статистической проверки гипотезы $H_0: \mu_{\Delta}=1$, при $H_1: \mu_{\Delta} \neq 1$

Относительное армирование	$\rho \leq 0,70\%$					$\rho > 0,70\%$					
	Интервалы	1	2	3	4	5-6	1	2	3-4	5	6
ACI		H_1	H_1	H_0	H_0	H_1	H_1	H_1	H_1	H_1	H_1
EC2		H_1	H_1	H_1	H_1	H_0	H_1	H_0	H_1	H_1	H_1
СНиП		H_1	H_0	H_0	H_1	H_1	H_0	H_0	H_0	H_0	H_0
ATENA		H_1	H_1	H_1	H_1	H_0	H_0	H_0	H_0	H_0	H_0
Flexural		H_0	H_0	H_0	H_1	H_1	H_0	H_0	H_1	H_1	H_1

Более важной характеристикой при сравнительном статистическом анализе точности расчёта прогибов железобетонных балок является величина дисперсии σ_{Δ}^2 , так как введением поправочных коэффициентов сравнительно легко можно отрегулировать величину математического ожидания μ_{Δ} .

Графически доверительные интервалы для стандартного отклонения σ_{Δ} и математического ожидания μ_{Δ} (см. Таблица 5) могут быть использованы, как удобный инструмент для оценки особенностей изменения величины относительной погрешности Δ (9) в зависимости от различных факторов. В нашем случае доверительные интервалы составлены отдельно, в зависимости от относительного количества арматуры ρ и относительной нагрузки \bar{F} (8).

Таблица 5. Доверительные интервалы для стандартного отклонения σ_{Δ} и математического ожидания μ_{Δ} (доверительная вероятность $\gamma=0,90$).

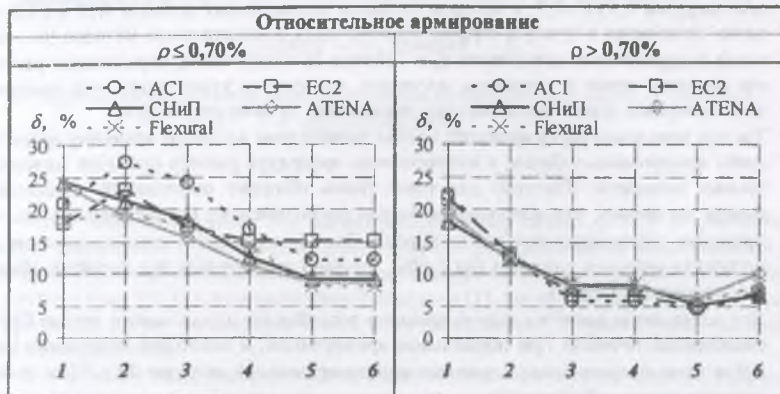


Параметром, при помощи которого можно одновременно оценить значения квадратичного отклонения s_{Δ} и среднего m_{Δ} , может служить коэффициент вариации:

$$\delta_{\Delta} = s_{\Delta} / m_{\Delta} \quad (11)$$

Уменьшение коэффициента вариации может свидетельствовать либо об уменьшении квадратичного отклонения s_{Δ} , либо об увеличении величины среднего m_{Δ} , что с инженерной точки зрения является позитивным, – так как лучше в результате расчёта получить величину прогиба, несколько превышающую реальное значение прогиба, иначе может возникнуть ситуация не предусмотренная расчётом.

Таблица 6. Изменение коэффициента вариации в зависимости от величины нагрузки



Результаты и выводы

- При расчёте прогибов балок с относительным армированием свыше 0,70% большую точность (с точки зрения стандартного отклонения), по сравнению с мало армированными образцами, показали все без исключения методы. Это может быть объяснено возрастающим влиянием растягиваемого бетона, характеристики которого при растяжении отличаются большой вариацией, в слабо армированных балках.
- Величина стандартного отклонения изменяется с изменением величины нагрузки. Наибольшее стандартное отклонение наблюдается при малых значениях нагрузки, близких к моменту образования трещин. Процесс образования трещин в железобетонных элементах отличается нестабильностью, что и может объяснить увеличение стандартного отклонения.
- В большинстве случаев величина прогибов, рассчитанных при малых значениях нагрузки, превышает величину прогибов, полученную экспериментально (см. значения среднего m_{Δ} в Таблица 2). Одновременно наблюдается относительно большое значение стандартного отклонения. Исключением могут считаться прогибы нормально армированных балок, рассчитанные при помощи СНиП и КЭ пакета ATENA, величина которых не уменьшается по отношению к экспериментальным данным с увеличением нагрузки. Для американских ACI и европейских EC2 нормативных методов с увеличением нагрузки величина относительной погрешности Δ становится значительно меньше единицы. Это может быть объяснено неучтёнными пластическими деформациями в бетоне сжатой зоны: эти особенности напряжённо-деформированного состояния не учтены американскими и европейскими нормами расчёта. Несмотря на то, что для мало армированных балок возникновение подобных пластических деформаций не играет значительной роли, (что и заметно по результатам расчёта при помощи КЭ пакета ATENA и норм EC2), прогибы мало армированных балок, рассчитанные при помощи норм ACI, с увеличением нагрузки приобретают величину менее единицы. Фактически, тенденция расчёта при помощи норм ACI (с точки зрения зависимости величины m_{Δ} от нагрузки \bar{F}) не зависит от степени армирования балок.

- Для нормально армированных балок все методы показали схожую точность (с точки зрения величины дисперсии). Исключением может служить интервал относительной нагрузки $0,5 \leq \bar{F} < 0,7$, в котором точность нормативных методов АСІ и EC2 заметно отличается в лучшую сторону от остальных рассмотренных методов (см. значения квадратичного отклонения s_d в Таблица 2). Фактически, нормативная расчётная нагрузка лежит в указанном интервале, поэтому не удивительно, что именно в этом интервале нормативные методы показывают лучшие результаты.
- Так как поведение растягиваемого бетона значительно влияет на величину прогибов слабо армированных балок, а итерационная процедура расчёта прогибов железобетонных элементов (Flexural) для таких балок обладает наименьшей дисперсией, можно заключить, что использованная для растягиваемого бетона зависимость напряжение-деформация определена хорошо. Значение математического ожидания μ_d , несколько меньшее единицы (на 2-6%), вызвано неучтённым при расчётах эффектом поперечного сдвига.
- Для результатов расчёта с использованием российского нормативного метода СНиП свойственна точность при нормальном армировании, и некоторая недооценка прогибов мало армированных элементов при относительной нагрузке $0,6 \leq \bar{F}$ (см. значения среднего m_d в Таблица 2).

Список литературы

1. ACI Committee 318. Building Code Requirements for Reinforced Concrete and Commentary (ACI 318-89/ACI 318R-89). Detroit: ACI, 1989.
2. Branson DE. Deformation of Concrete Structures. New York: McGraw Hill Book Company, 1977.
3. ENV 1992-1-1. Eurocode 2 (EC2): Design of Concrete Structures – Part 1: General rules and rules for buildings. Brussels, 1992.
4. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989.
5. Červenka V., Jendele L., Červenka J. ATENA Program Documentation. Theory. Prague: Cervenka Consulting, 2003.
6. Kaklauskas G. Integral constitutive model for deformational analysis of concrete structures. – Vilnius: Technika, 2001.
7. Артемьев В.П. Исследование прочности, жёсткости и трещиностойкости обычных и предварительно напряжённых железобетонных балок. Диссертация. – М., 1959.
8. Гуца Ю.П. Исследование изгибаемых железобетонных элементов при работе стержневой арматуры в упругопластической стадии. Диссертация. – М., 1968.
9. Фигаровский В.В. Экспериментальное исследование жёсткости и трещиностойкости железобетонных изгибаемых элементов при кратковременном и длительном действии нагрузок. Диссертация. – М., 1962.
10. Neter J., Wasserman W., Kutner M.H. Applied linear statistical models: regression, analysis of variance, and experimental design. В.: RDI, 1990.
11. Зарубин В.С., Крищенко А.П. Математическая статистика. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
12. Рабинович С.Г. Погрешности измерений. – Л.: Энергия, 1978.